METHODE DES ELEMENTS FINIS

DAVEAU CHRISTIAN [1]

[1] Université de Cergy-Pontoise, Département de mathématique, 95302, Cergy-Pontoise, cedex France.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Dans ce cours nous présentons la méthode des éléments finis qui est la méthode numérique de référence pour le calcul des solutions de problèmes aux limites. Le principe de la méthode est directement issu de l'approche variationnelle.

L'idée de base de la méthode des éléments finis est de remplacer l'espace de Hilbert V sur lequel est posée la formulation variationnelle par un sous espace de dimension finie. Le problème approché posé sur V_h se ramène à la résolution d'un système linéaire, dont la matrice est appelée **matrice de rigidité**.

Historiquement, les premières prémices de la méthode des éléments finis ont été proposés par Richard Courant dans les années 1940 mais ce sont les mécaniciens qui ont développé, poularisé et démontré l'efficacité de cette méthode dans les années 1950-1960. Après ces premiers succès pratiques, des mathématiciens appliqués ont considérablement développé les fondations théoriques de la méthode et proposé des améliorations significatives.

Le plan du cours est le suivant :

1. On voit d'abord l'approche variationnelle, c'est la partie la plus théorique du cours avec le dernier chapitre car on utilise les es-

paces de Sobolev et certains résultats comme l'inégalité de Poincaré ou la continuité de l'application trace

2. On applique la méthode des éléments finis en 1D puis 2D sur differents problèmes aux dérivées partielles
3. On donne brièvement une théorie sur les éléments finis (unisolvance..)
4. Enfin on aborde les formulations mixtes et les éléments de Raviart-Thomas qui permettent de discrétiser des quantités physiques qui ont une composante normale continue.

Chapitre 2

Formulations variationnelles d'un problème aux limites

2.1 Eléments sur des espaces de fonctions

2.1.1 Espace des fonctions régulières

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de bord Γ. On note par $D(\Omega)$ ou $C_0^\infty(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions C^∞ sur Ω à support compact inclus dans Ω. $D'(\Omega)$ son dual topologique, c'est à dire l'ensemble des formes linéaires et continues sur $D(\Omega)$. On écrit

$$T(\varphi) =< T, \varphi >, \forall T \in D'(\Omega),\ \varphi \in D(\Omega),$$

voir [12] et [13] pour plus de détails sur la théorie des distributions.

Exemple :

$$w(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}},\ |x| < 1, \\ 0,\ \text{sinon} \end{cases}$$

avec $|x| = (x_1^2 + ... + x_n^2)^{1/2}$ appartient à $D(\Omega)$. Son support est dans la boule $\{x \in \mathbb{R}^n :\ |x| \leq 1\}$.

2.1.2 Espace des fonctions intégrables

On note par $L^p(\Omega)$ où p est un entier ≥ 1 l'espace des fonctions réelles définies sur Ω telle que :

$$\int_\Omega u(x)^p \, dx < \infty.$$

$L^p(\Omega)$ est équippé de la norme

$$||u||_{L^p(\Omega)} = (\int_\Omega u(x)^p \, dx)^{1/p}.$$

L'espace $L^\infty(\Omega)$ est constitué des fonctions définies sur Ω telles qu'il existe un réel positif M tel que $|u(x)| \leq M$ presque partout dans Ω. La plus petite constante M est notée $||u||_{L^\infty(\Omega)}$.

L'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x) \, dx.$$

Clairement, $||u||_{L^2(\Omega)} = (u, v)^{1/2}$.

Lemme 2.1.1 *Inégalité de Cauchy-Schwarz*
Soit u et v deux fonctions de $L^2(\Omega)$; alors $uv \in L^1(\Omega)$ et

$$|(u, v)| \leq ||u||_{L^2(\Omega)} ||v||_{L^2(\Omega)}.$$

Une généralisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz est l'inégalité de Hölder.

Lemme 2.1.2 *Soit u et v deux fonctions de $L^p(\Omega)$ et $L^{p'}(\Omega)$ respectivement avec $1/p + 1/p' = 1$:*

$$|(u, v)| \leq ||u||_{L^p(\Omega)} ||v||_{L^{p'}(\Omega)}.$$

2.1.3 Espaces de Sobolev

On s'interesse à deux espaces de Sobolev :

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega),\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega),\ \forall i\},$$

$$H^2(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega),\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x_i x_j} \in L^2(\Omega),\ \forall i, j\}.$$

Les dérivées dans les espaces de Sobolev sont pris au sens des distributions.
On note

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega),\ \ u = 0 \text{ sur } \Gamma\}.$$

Corollaire 2.1.1 *(Inégalité de Poincaré) Il existe une constante $C \geq 0$ telle que*

$$\forall u \in H_0^1(\Omega),\ \ \int_\Omega (u(x))^2 d\,x \leq C \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 d\,x.$$

Corollaire 2.1.2 *L'application*

$$\gamma_0 : \begin{cases} H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma) \\ u \mapsto u_{/\Gamma} \end{cases}$$

appelée trace est une application continue et surjective de $H^1(\Omega)$ dans un sous espace de $L^2(\Gamma)$ qui est dense dans $L^2(\Gamma)$.

Remarque 2.1.1 *Les fonctions de $L^2(\Omega)$ n'ont pas de trace sur Γ car elles ne sont pas assez régulières en général. Pour $u \in L^2(\Omega)$, $u_{/\Gamma}$ n'a pas de sens en général.*

En outre on note $|u|_{1,\Omega} = |\nabla u|_{L^2(\Omega)^n}$; c'est une semi-norme dans $H^1(\Omega)$ et c'est une norme dans $H_0^1(\Omega)$ car si u a toutes ses dérivées partielles premières nulles sur Ω et que Ω est connexe alors u est constante et comme elle est nulle sur le bord elle est nulle dans Ω.
En outre avec l'inégalité de Poincaré, on montre que cette norme est équivalente à la norme $||\ \ ||_{H^1(\Omega)}$ dans $H_0^1(\Omega)$.

On rappelle **la formule de Green.**

Lemme 2.1.3 *Si $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$:*

$$-\int_\Omega \Delta u(x)\, v(x)\, dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}\, v\, d\sigma$$

avec $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu$ où ν est un vecteur normal extérieur à Γ, **la dérivée normale de** *u.*

2.2 Etablissement de formulations variationnelles

2.2.1 Formulation faible du problème de Dirichlet homogène

Considérons le problème aux limites appelé **problème de Dirichlet homogène**. Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$ et Γ son bord supposé lipschitzien :

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + c(x)u(x) = f(x) \ \ \forall x \in \Omega \\ u(x) = 0 \ \ \forall x \in \Gamma. \end{cases} \tag{2.1}$$

$c \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$. En outre, on suppose qu'il existe $c_0 > 0$ telle que $\forall x \in \Omega$, $c(x) \geq c_0 > 0$.

On multiplie la première équation par une fonction **test** v supposée régulière et on intègre sur le domaine Ω. On a :

$$-\int_\Omega \Delta u(x)\, v(x)\, dx + \int_\Omega c(x)u(x)v(x)\, dx = \int_\Omega f(x)v(x)\, dx.$$

En utilisant la formule de Green, nous avons :

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx + \int_\Omega c(x)u(x)v(x)\, dx = \int_\Omega f(x)v(x)\, dx.$$

Le terme de bord disparait car on va prendre v nulle sur Γ comme la solution u.

Nous allons maintenant chercher : $u \in H_0^1(\Omega)$ qui satisfait

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx + \int_\Omega c(x)u(x)v(x)\, dx = \int_\Omega f(x)v(x)\, dx, \ \ \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.2}$$

Le problème (2.2) s'appelle la **formulation faible** ou **formulation variationnelle** de (3.1).

2.2.2 Formulation faible du problème de Neumann

Soit toujours Ω un ouvert borné de $I\!R^n$ de frontière Γ C^1 par morceaux ; on considère cette fois le problème suivant : étant donné $f \in L^2(\Omega)$, trouver une fonction u définie dans Ω et solution de

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + u(x) = f(x) \; \forall x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \; \forall x \in \Gamma. \end{cases} \tag{2.3}$$

Supposons la solution u de (2.3) suffisamment régulière, par exemple la fonction $u \in H^2(\Omega)$; on multiplie les deux membres de l'équation aux dérivées partielles par une fonction test $v \in H^1(\Omega)$, on intègre sur Ω et on utilise la formule de Green. Compte tenu de la condtions aux limites, on obtient

$$\forall v \in H^1(\Omega), \; \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f(x) v(x) \, dx.$$

On remplace le problème (2.3) par le suivant : Etant donné $f \in L^2(\Omega)$, trouver une fonction $u \in H^1(\Omega)$ vérifiant

$$\forall v \in H^1(\Omega), \; \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f(x) v(x) \, dx.$$

2.3 Résolution du problème variationnel

On fait quelques rappels d'analyse fonctionnelle, voir [14] et[10] pour plus de détails.

Definition 2.3.1 *On appelle espace de Hilbert un espace vectoriel muni d'un produit scalaire dont l'espace normé induit est complet.*

Definition 2.3.2 *a est une forme bilinéaire sur* $V \times V$ *si*

1. *a est définie de $V \times V$ dans $\mathbb{R}$,*
2. *a est linéaire par rapport à chaque argument.*

On a aussi.

Definition 2.3.3 *a est continue sur $V \times V$ s'il existe une constante M réelle positive telle que*

$$|a(u,v)| \leq M||u||||v|| \ \ \forall (u,v) \in V \times V.$$

Le résultat suivant est le point clé des études variationnelles.

Théorème 2.3.1 *(Lax-Milgram) Soit V un espace de Hilbert sur $I\!R$ et a une forme bilinéaire continue et V-elliptique (ou coercive) c'est à dire qu'il existe un réel $\alpha \geq 0$ tel que :*

$$a(u,u) \geq \alpha ||u||^2, \, \forall u \in V.$$

On considère L une forme linéaire sur V.
Alors il existe un unique $u \in V$ tel que

$$a(u,v) = L(v) \ \forall v \in V.$$

De plus, on a l'estimée

$$||u||_V \leq \frac{1}{\alpha}||L||_{V'}$$

V' étant l'ensemble des formes linéaires sur V.

démonstration : (facultative)
Fixons, $u \in V$ et considérons l'application

$$Au : \begin{cases} V \to I\!R \\ v \mapsto a(u,v) \end{cases}$$

On a $Au \in V'$ car

$$|Au(v)| \leq M||u||_V||v||_V, \forall v \in V.$$

Ceci prouve que
$$||Au||_{V'} \leq M||u||_V.$$
Pour ρ un paramètre positif, on introduit la fonction
$$\Phi_\rho : \begin{cases} V \to V, \\ u \mapsto u - \rho T(Au - l) \end{cases}$$
l'application T étant la représentation de Riesz et $L = T(l)$. Il nous reste à montrer que, pour ρ suffisamment petit, Φ_ρ est une contraction. On aura alors $Au = l$, c'est à dire l'exixtence d'un unique $u \in V$ tel que $a(u, v) = L(v) \forall v \in V$. On a :
$$||\Phi_\rho(u) - \Phi_\rho(v)||_V^2 = ||u - v||_V^2 + \rho^2||Au - Av||_{V'} - 2\rho a(u - v, u - v).$$
D'où
$$||\Phi_\rho(u) - \Phi_\rho(v)||_V^2 \leq (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 M^2)||u - v||_V^2.$$
Il suffit de choisir
$$0 < \rho < 2\alpha/M^2.$$
De plus si on fait $u = v$, on a
$$a(u, u) = L(u).$$
En utilisant la coercivité de et la continuité de a on a
$$\alpha||u||_V^2 \leq a(u, u) = L(u) \leq ||L||_{V'}||u||_V.$$
Reprenons le problème (2.2) :

1. $V = H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :
$$(u, v)_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)\, dx + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx,$$
2. $a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx + \int_\Omega c(x)u(x)v(x)\, dx$ est une forme bilinéaire, continue sur $V \times V$ et V-elliptique,
3. $L(v) = \int_\Omega f(x)v(x)\, dx$ est une forme linéaire sur V.

2.4 Interprétation du problème variationnel

Question : La solution $u \in V$ trouvée dans (2.2) est-elle solution du problème (3.1) ?

Réponse :

Proposition 2.4.1 *u solution de* (3.1) *si et seulement si u est solution de* (2.2).

Démonstration : (facultative)
Si u est solution de (3.1) alors u est solution de (2.2).

Inversement, supposons u solution de (2.2). L'idée de base est alors de choisir une fonction test $v \in D(\Omega)$ ce qui est possible car $D(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$. On a alors :

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega c(x)u(x)v(x)\, dx = \int_\Omega f(x)v(x)\, dx \quad \forall v \in D(\Omega).$$

En utilisant la formule de Green à l'envers, on a :

$$-\int_\Omega \Delta u(x)\, v(x)\, dx + \int_\Omega c(x)u(x)v(x)\, dx = \int_\Omega f(x)v(x)\, dx \quad \forall v \in D(\Omega).$$

On rappelle le résultat suivant :

Lemme 2.4.1 *Soit $f \in L^2(\Omega)$, si $\int_\Omega f\varphi\, dx = 0$ pour tout $\varphi \in D(\Omega)$ alors $f = 0$ presque partout dans Ω.*

Le lemme donne que

$$-\Delta u(x) + c(x)u(x) = f(x) \text{ pp dans } \Omega.$$

D'autre part $u \in H_0^1(\Omega)$ donc $u = 0$ sur le bord de Ω. Ainsi u est solution de (3.1).

2.4.1 Deuxième exemple : problème de Neumann

Toute solution u suffisamment régulière de (2.3) est solution du problème précédent. Réciproquement, si u solution de la formulation faible, on a en particulier

$$\forall v \in D(\Omega),\ \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f(x) v(x) \, dx.$$

Lorsque u est régulière, à savoir ici $u \in H^2(\Omega)$, on obtient en appliquant la formule de Green

$$-\int_\Omega \Delta u(x) \, v(x) \, dx = \int_\Omega f(x) v(x) \, dx$$

ce qui équivaut à l'équations aux dérivées partielles de (2.3) et

$$\forall v \in H^1(\Omega),\ \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, d\sigma = 0$$

ce qui donne la condition aux limites si on admet que l'espace des traces sur Γ est dense dans $L^2(\Gamma)$.

2.5 Exercices

Exercice 2.5.1 *On considère un domaine rectangulaire $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de bord $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ tel que $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$. On considère le problème elliptique suivant :*

$$(1) \quad \begin{cases} -\Delta u = f \ \textit{dans } \Omega, \\ u = 0 \ \textit{sur } \Gamma_D, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \ \textit{sur } \Gamma_N, \end{cases}$$

avec $f \in L^2(\Omega)$. On suppose que $u \in H^2(\Omega)$ et on rappelle que l'application trace est continue de $H^1(\Omega)$ dans un sous espace de $L^2(\Gamma)$.

1. *Etablir une formulation variationnelle (FV) du problème.*
2. *Montrer que cette FV a une unique solution.*

3. *Montrer que la solution de la (FV) est une solution faible du problème* (1).

Exercice 2.5.2 *Soit* Ω *un ouvert régulier de* $\mathbb{R}^2$*, on considère le problème suivant : trouver une fonction* u *telle que :*

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{c} V \cdot \nabla u - \Delta u = f \ \ dans\ \Omega, \\ u = 0 \ \ sur\ \Gamma \end{array} \right.$$

avec $V \in \mathbb{R}^2$ *donné tel que* $div(V) = 0$ *et* $f \in L^2(\Omega)$.

1. *Ecrire une formulation variationnelle du problème.*
2. *Montrer la relation* $div(uV) = \nabla(u) \cdot V + udiv(V)$ *pour toute fonction réelle* u *et tout vecteur* V.
3. *Montrer que la FV a une unique solution.*
4. *Montrer que la solution de la FV est solution de* (1). *On supposera que la divergence de* ∇u *est dans* $L^2(\Omega)$.

On rappelle la formule de Stokes

$$\int_\Omega div(u)vdx = -\int_\Omega u \cdot \nabla v dx + \int_\Gamma u \cdot nvd\,\sigma$$

avec n *normale sortante à* Ω *et pour tout* u *tel que* u *et* $div(u)$ *sont dans* $L^2(\Omega)$ *et* v *élément de* $H^1(\Omega)$.

Exercice 2.5.3 *Problème de Maxwell*
On s'intéresse ici aux équations venant de la modélisation de phénomènes électromagnétiques. On suppose que le problème est posé dans un domaine Ω *ouvert borné et lipschitzien de* $\mathbb{R}^2$. *On note en gras les fonctions à valeurs vectorielles. On rappelle que pour toute fonction* φ *de* Ω *dans* $\mathbb{R}$,

$$\mathbf{rot}\,\varphi = (\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1})$$

et pour toute fonction $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ *de* Ω *dans* $\mathbb{R}^2$

$$rot\mathbf{u} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}.$$

On note $\mathbf{n}$ *le vecteur unitaire normal extérieur à* Ω *sur* Γ *le bord de* Ω*. Dans certains cas on est amené à rechercher la solution* $\mathbf{u}$ *du problème :*

$$(1) \quad \begin{cases} \mathbf{rot}\, rot\mathbf{u} = f \ \textit{dans}\ \Omega, \\ \mathbf{n} \wedge \mathbf{u} = 0 \ \textit{sur}\ \Gamma \quad \textit{condition aux limites du conducteur parfait} \end{cases}$$

où la solution $\mathbf{u}$ *est un vecteur au moins dans* $(L^2(\Omega))^2$ *et* $\mathbf{f} \in (L^2(\Omega))^2$.

On introduit le cadre fonctionnel où l'analyse du problème va se dérouler. Il s'agit de l'espace $H(rot\,;\Omega)$ *défini par :*

$$H(rot\,;\Omega) = \{v \in (L^2(\Omega))^2; rot\,\mathbf{v} \in (L^2(\Omega))^2\}.$$

$H(rot\,;\Omega)$ *est un espace de Hilbert muni de la norme*

$$||v||_{H(rot\,;\Omega)} = (||u||^2_{L^2} + ||rot\,\mathbf{v}||^2_{L^2})^{1/2}.$$

On supposera que l'application trace tangentielle $v \mapsto \mathbf{v} \wedge \mathbf{n}$ *est continue de* $H(rot\,;\Omega)$ *sur un espace* M *de Hilbert de fonctions définies sur Gamma et qui n'est pas préciser. On introduit l'espace* $H_0(rot\,;\Omega)$ *des fonctions de* $H(rot\,;\Omega)$ *de trace tangentielle nulle.*
On a la formule de Stokes : pour tout $\mathbf{v} \in H(rot\,;\Omega)$ *et* $\varphi \in H^1(\Omega)$ *:*

$$\int_\Omega rot\,\mathbf{v}\varphi\,dx = \int_\Omega \mathbf{v} \cdot \mathbf{rot}\,\varphi\,dx + \int_\Gamma \mathbf{n} \wedge \mathbf{v}\varphi\,ds.$$

$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = a_1 b_2 - a_2 b_1$ *si* $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ *et* $\mathbf{b} = (b_1, b_2))$.

1. *Etablir un formulation variationnelle de* (1).
2. *Montrer que l'on est dans le cadre du théorème de Lax Milgram. En déduire l'existence et l'unicité de la solution.*
3. *Montrer que la solution de la FV est solution de* (1).

Chapitre 3

Approximation par la méthode des éléments finis

3.1 Principe de la méthode des éléments finis

Reprenons le problème de Dirichlet homogène :

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + c(x)u(x) = f(x) \ \ \forall x \in \Omega \\ u(x) = 0 \ \ \forall x \in \Gamma. \end{cases} \tag{3.1}$$

On a écrit une formulation de ce problème sous la forme :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \ \ \text{ tel que} \\ a(u,v) = L(v) \ \forall v \in V \end{cases} \tag{3.2}$$

avec

1. $V = H_0^1(\Omega)$,
2. $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega c(x)u(x)v(x)\, dx$,
3. $L(v) = \int_\Omega f(x)v(x)\, dx$.

But : calculer une solution approchée du problème variationnel (3.2) ce qui nous donnera d'après la proposition (1.3.1) une solution approchée du problème (3.1).

Question : comment calculer explicitement une solution approchée qui soit facilement calculable tout en ayant une idée assez précise de l'erreur commise par rapport à la solution exacte ?

3.1.1 Stratégie utilisée

L'idée de base consiste à résoudre le problème (3.2) dans un espace de dimension finie V_h inclus dans V approchant l'espace V dans un sens à définir : c'est le principe de la méthode de **Galerkin**.En outre, la construction de l'espace V_h repose sur la notion géométrique de **maillage**. Dans ce contexte le paramètre h correspond à la **taille maximale des mailles** ou cellules qui composent le maillage ; il est strictement positif et dans la limite $h \to 0$, l'espace V_h sera de plus en plus gros et approchera de mieux en mieux l'espace V tout entier.

On cherchera à résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ a(u_h, v) = L(v)\ \forall v \in V_h. \end{cases} \tag{3.3}$$

Le problème (3.3) s'appelle le problème **discret** du problème **continu** (3.2).

Pourquoi V_h est de dimension finie ?

pour n'avoir qu'un nombre fini d'inconnues ou **degrés de liberté** qui seront les composantes de la solution approchée dans une base de V_h ; ces composantes pourront facilement être calculées en résolvant un **système linéaire** qui est la version matricielle du problème (3.3).

D'un point de vue théorique, il est nécessaire que ce nombre de degrés de liberté puisse être aussi grand que l'on veut, de manière à approcher la solution exacte de façon la plus précise possible. Autrement dit si N_h désigne la dimension de V_h, on souhaite que $N_h \to \infty$ quand $h \to 0$. Plus précisement :

Definition 3.1.1 *On dit que les espaces $(V_h)_h$, $h > 0$ forment une* **approximation interne** *de V si*

1. *pour tout $h > 0$, $V_h \subset V$.*
2. *pour tout $v \in V$, il existe $v_h \in V_h$ tel que*

$$||v - v_h||_V \to 0 \text{ quand } h \to 0.$$

D'un point de vue pratique, la construction de l'espace V_h doit satisfaire deux exigences :

1. V_h est facile à construire : on pourra choisir un espace dont la base sera formée de fonctions polynomiales par morceaux.
2. la matrice du système sera creuse c'est à dire aura beaucoup d'éléments nuls : plus elle sera creuse moins elle occupera de place mémoire. Pour cela, on choisira une base dont les fonctions ont un support dans quelques mailles.

3.1.2 Calcul effectif de la solution approchée

L'espace V_h étant de dimension finie N_h, il admet une base formée des fonctions $(w^1, w^2, ..., w^{N_h})$. On cherche alors u_h sous la forme

$$u_h = \sum_{i=1}^{N_h} u_i w^i$$

où (u_i) sont les inconnues du problème (3.3). Pour que la relation est lieu $\forall v_h \in V_h$, il suffit que cette relation soit pour chacune des fonctions de base de l'espace V_h. Ce qui donne en utilisant la décomposition de u_h et la linéarité de a par rapport à son premier argument :

$$\forall i \in \{1, 2, .., N_h\}, \ \sum_{j=1}^{N_h} a(w^j, w^i) = L(w^i).$$

Introduisons la matrice A de taille $N_h \times N_h$ dont les coefficients d'indice i, j valent

$$A_{ij} = a(w^j, w^i)$$

et le vecteur b de $I\!R^{N_h}$ défini par

$$b_i = L(w^i), \ \ \forall i = 1, .., N_h.$$

Résoudre (3.3) revient à résoudre le système linéaire (S)

$$AX = b$$

où $X = (u_1, u_2, ..., u_{N_h})$.

Le système (S) a une unique solution car la matrice A est définie positive donc inversible, (A est définie positive si $\forall X = (X_1, ..., X_{N_h}) \in I\!R^{N_h},\ X^t AX \geq 0$ et $X^t AX = 0$ implique $X = 0$). En effet, on a

$$X^t AX = \sum_{i=1}^{N_h} \sum_{j=1}^{N_h} A_{ij} X_i X_j$$

$$= \sum_{i=1}^{N_h} \sum_{j=1}^{N_h} a(w^j, w^i) X_i X_j$$

$$= \sum_{i=1}^{N_h} a(\sum_{j=1}^{N_h} X_j w^j, w^i) X_i, \quad \text{(linéarité par rapport à la première variable)}$$

$$= a(\sum_{j=1}^{N_h} X_j w^j, \sum_{i=1}^{N_h} X_i w^i), \quad \text{(linéarité par rapport à la deuxième variable)}$$

$$= a(y, y) \text{ si } y = \sum_{j=1}^{N_h} X_j w^j$$

$$\geq \alpha ||y||^2 \text{ car } a \text{ est V-elliptique .}$$

D'où, le résultat.

Ainsi la solution du système (S) est

$$X = A^{-1} b.$$

3.1.3 Estimer l'erreur entre u et u_h

On a le résultat suivant.

Lemme 3.1.1 *(de Cea) On a l'estimation suivante :*

$$||u - u_h||_V \leq \frac{M}{\alpha} inf_{v_h \in V_h} ||u - v_h||_V$$

où M est la constante de continuité de a et α la constante d'ellipticité.

preuve : Comme $V_h \subset V$ on a la relation **d'orthogonalité :**

$$a(u - u_h, v_h) = 0 \ \ \forall v_h \in V_h.$$

On en déduit que

$$a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h + v_h - u_h), \ \ \forall v_h \in V_h$$

$$= a(u - u_h, u - v_h) + a(u - u_h, v_h - u_h) \ \ \forall v_h \in V_h$$

$$= a(u - u_h, u - v_h) \ \ \forall v_h \in V_h \quad \text{(d'après la relation d'orthogonalité).}$$

Ainsi,

$$\alpha||u - u_h||^2 \leq a(u - u_h, u - u_h) \leq M||u - u_h||||u - u_h||.$$

On obtient alors :

$$||u - u_h|| \leq \frac{M}{\alpha}||u - v_h||, \ \ \forall v_h \in V_h.$$

Remarque 3.1.1 *En pratique pour évaluer l'erreur* $||u-u_h||$*, on choisira un élément particulier* v_h *qui sera l'interpolé de* u *en un sens que l'on précisera plus loin et on montrera que cette erreur est d'ordre* h^k *où* k *est un entier qui dépend de* V_h*.*

Chapitre 4

Mise en oeuvre de la méthode en dimension 1

Prenons l'exemple suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x) \ \ \forall x \in]a, b[\\ u(a) = 0, \ \ u'(b) = \beta \end{cases} \tag{4.1}$$

où β est un nombre réel donné, $c \in L^\infty(]a, b[)$, $f \in L^2(]a, b[)$ et il existe $c_0 > 0$ telle que $\forall x \in]a, b[$, $c(x) \geq c_0 > 0$.

4.1 Résolution du problème continu

On suppose que (4.1) admet une solution unique $u \in H^2(]a, b[)$. Soit $v \in H^1(]a, b[)$, on multiplie la première équation par v, on intègre sur $]a, b[$ et on fait une intégration par parties :

$$\int_a^b u'(x)v'(x)dx - u'(b)v(b) + u'(a)v(a) + \int_a^b c(x)u(x)v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx.$$

Comme $u(a) = 0$ et $u'(b) = \beta$, on a

$$\int_a^b (u'(x)v'(x) + c(x)u(x)v(x))dx = \int_a^b f(x)v(x)dx + \beta v(b).$$

On propose la formulation variationnelle de (4.1) :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \ \ \text{tel que} \\ a(u, v) = L(v) \ \forall v \in V. \end{cases} \tag{4.2}$$

1. $V = \{v \in H^1(]a,b[), \;\; v(a) = 0\}$,
2. $a(u,v) = \int_a^b (u'(x)v'(x) + c(x)u(x)v(x))dx$,
3. $L(v) = \int_a^b f(x)v(x)dx + \beta v(b)$.

Remarque 4.1.1 *On peut noter que la condition sur v est dans l'espace V tandis que celle sur la dérivée n'est pas imposée. On dira que la première condition de type* **Dirichlet** *est explicite tandis que la deuxième qui est une condition de type* **Neumann** *est implicite, (on la retrouve dans la formulation implicitement écrite !).*

On peut montrer avec le théorème de Lax-Milgram que le problème (4.2) a une unique solution $u \in V$ et que les deux problèmes (4.1) et (4.2) sont équivalents, (en exercice).

4.2 Problème discret

4.2.1 Construction de l'espace V_h

La construction de V_h doit satisfaire

1. $V_h \subset H^1(]a,b[)$ c'est pour cela que l'on va construire V_h tel que $V_h \subset C^0([a,b])$,
2. la matrice A du système doit être creuse
3. la base de V_h est facile à définir

Soit N un entier positif, $h = \frac{b-a}{N+1}$, on désigne par

$$x_i = a + i * h, \;\; i \in \{0, N+1\}$$

les $N+2$ points du maillage. h s'appelle **le pas du maillage**. On a en particulier $x_0 = a$ et $x_{N+1} = b$.

On introduit l'espace de dimension finie V_h défini par

$$V_h = \{v_h \in \tilde{V_h}, \;\; v_h(a) = 0\}$$

avec

$\tilde{V_h} = \{v_h : [a,b] \mapsto I\!R,\ v_h \in C^0([a,b]),\ v_{h/[x_i,x_{i+1}]} \in P_1,\ \forall i \in \{0,1,...,N\}\}$

où P_1 est l'espace de degré inférieur ou égal à un.

Lemme 4.2.1 *1. Les fonctions de $\tilde{V_h}$ sont entièrement déterminées par les valeurs qu'elles prennent en chacun des points x_i, $i \in \{0,1,2,...,N+1\}$.*

2. La dimension de $\tilde{V_h}$ est $N+2$ et une base de $\tilde{V_h}$ est formée des fonctions w^i, $i \in \{0,1,2,...,N+1\}$ suivantes : $w^i \in \tilde{V_h}$, $w^i(x_j) = \delta_{ij}$ (indice de Kronecker).

Ces fonctions sont appelées **fonctions chapeaux** *en raison de leur graphe et on a :*

$$\forall v_h \in \tilde{V_h},\ v_h(x) = \sum_{i=0}^{N+1} v_h(x_i) w^i(x).$$

Les scalaires $v_h(x_i)$, $i \in \{0,1,2,...,N+1\}$ sont les **degrés de liberté** *de la fonction $v_h \in \tilde{V_h}$.*

3. $\tilde{V_h} \subset H^1(]a,b[)$.

preuve : La fonction $v_{h/[x_i,x_{i+1}]}$ est affine donc elle s'écrit sous la forme $(v_h)_{/[x_i,x_{i+1}]} = ax+b$, $a,b \in I\!R$. Les deux paramètres sont déterminés par les valeurs $v_h(x_i)$ et $v_h(x_{i+1})$, ($h \neq 0$ donc $x_i \neq x_{i+1}$).
La fonction v_h est donc parfaitement connue sur $[a,b]$ car chaque restriction sur $[x_i, x_{i+1}]$ est déterminée.
D'après 1) les fonctions w^i sont parfaitement déterminées sur $[a,b]$. Montrons que c'est une base de $\tilde{V_h}$.
Montrons que la famille est libre : soient $N+2$ scalaires $\lambda_0, ..., \lambda_{N+1}$ tel que la fonction $v_h(x) = \sum_{j=0}^{N+1} \lambda_j w^j(x)$ soit nulle. En particulier,

$$\forall i \in \{0,1,2,...,N+1\},\ 0 = v_h(x_i) = \sum_{j=0}^{N+1} \lambda_j w^j(x_i) = \lambda_i.$$

Chacun des coefficients λ_i est donc nul, et la famille est libre.

Montrons que la famille est génératrice : soit $v_h \in \tilde{V_h}$ et $w = \sum_{i=0}^{N+1} v_h(x_i)w^i(x)$. Evidemment, $w \in \tilde{V_h}$ et $w(x_i) = v_h(x_i), \forall i$. D'après le premier point, on a $w = v_h$. Donc la famille est génératrice donc c'est une base et la dimension de $\tilde{V_h}$ est $N+2$.

Montrons 3 : si $v_h \in \tilde{V_h}$, $v_h \in C^0([a,b])$ donc est bornée sur $[a,b]$. Par suite,

$$\int_a^b v_h(x)^2\, dx \leq sup_{x\in[a,b]}|v_h(x)|(b-a).$$

Donc $v_h \in L^2([a,b])$.

Montrons que sa dérivée au sens des distributions est dans $L^2([a,b])$, (on peut admettre cette démonstration).
Soit $v_h \in \tilde{V_h}$, on a pour tout $\varphi \in D(]a,b[)$

$$< (v_h)', \varphi >= - < v_h, \varphi' >= - \sum_{i=0}^{N+1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} v_h(x)\varphi'(x)\, dx.$$

En intégrant par parties sur $[x_i, x_{i+1}]$, on a :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} v_h(x)\varphi'(x)\, dx = - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \{v_h'\}(x)\varphi(x)\, dx + v_h(x_{i+1})\varphi(x_{i+1}) - v_h(x_i)\varphi(x_i)$$

où $\{v_h'\}$ désigne la dérivée usuelle de v_h égale à $\frac{v_h(x_{i+1})-v_h(x_i)}{h}$ sur $[x_i, x_{i+1}]$. Donc, on a $\{v_h'\} \in L^2([a,b])$. Sommant sur les indices i, on a

$$< v_h', \varphi >=< \{v_h'\}, \varphi > + v_h(a)\varphi(a) - v_h(b)\varphi(b).$$

Comme $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, les distributions v_h' et a $\{v_h'\}$ sont égales. Donc $v_h' \in L^2([a,b])$.

Corollaire 4.2.1 *1. Les fonctions de V_h sont entièrement déterminées par les valeurs qu'elles prennent en chacun des points x_i, $i \in \{1, 2, ..., N+1\}$.*

2. *La dimension de* V_h *est* $N+1$ *et une base de* V_h *est formée des fonctions* w^i, $i \in \{1, 2, ..., N+1\}$ *suivantes :* $w^i \in \tilde{V_h}$, $w^i(x_j) = \delta_{ij}$ *(indice de Kronecker).*
   On a :
   $$\forall v_h \in V_h,\ v_h(x) = \sum_{i=1}^{N+1} v_h(x_i) w^i(x).$$
   Les scalaires $v_h(x_i)$, $i \in \{1, 2, ..., N+1\}$ *sont les degrés de liberté de la fonction* $v_h \in V_h$.
3. $V_h \subset V$.

demonstration : Le 1 est immediat. Soit $v_h \in V_h$, alors $v_h \in \tilde{V_h}$ donc $v_h(x) = \sum_{i=0}^{N+1} v_h(x_i) w^i(x)$ avec $v_h(a) = 0$. Donc w^i pour $i \in \{1, 2, ..., N+1\}$ est génératrice. Elle est libre comme sous famille d'une famille libre donc c'est une base de V_h.

4.2.2 Calcul de la solution approchée

D'après le théorème de Lax-Milgram, il existe une solution unique u_h au problème variationnel discret :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ a(u_h, v) = L(v)\ \forall v \in V_h. \end{cases} \tag{4.3}$$

1. $a(u, v) = \int_a^b (u'(x)v'(x) + c(x)u(x)v(x))dx$,
2. $L(v) = \int_a^b f(x)v(x)dx + \beta v(b)$.

D'après le corollaire précédent, cette solution est de la forme :

$$u_h = \sum_{i=1}^{N+1} u_i w^i(x)$$

où le vecteur de $I\!R^{N+1}$ de composantes u_j est la solution du système linéaire :

$$AX = b$$

1. $A = (A_{ij})$, $1 \leq i, j \leq N+1$

$$A_{ij} = \int_a^b ((w^i)'(x)(w^j)'(x) + c(x)w^i(x)w^j(x))dx$$

2. $b = (b_i)_{1 \leq i \leq N+1}$

$$b_i = \int_a^b f(x)w^i(x)dx + \beta w^i(b).$$

Ainsi pour connaitre la solution approchée u_h, il suffit de calculer la matrice A et le second membre b.

Pour cela explicitons les fonctions de base w^i pour $i \in \{1, 2, ..., N+1\}$. La fonction w^i a son support dans $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ et par un calcul simple on a pour $i \in \{1, 2, ..., N\}$:

$$w^i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h} \text{ si } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1} - x}{h} \text{ si } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 \text{ sur les autres intervalles} \end{cases} \tag{4.4}$$

et la fonction w^{N+1} est à support dans $[x_N, b]$ et on a :

$$w^{N+1}(x) = \begin{cases} \frac{x - x_N}{h} \text{ si } x \in [x_N, b] \\ 0 \text{ sur les autres intervalles .} \end{cases} \tag{4.5}$$

Ces fonctions de base peuvent toutes s'exprimer à l'aide des fonctions de base de **l'élément de référence** w_0 et w_1 qui sont

$$w_0(x) = 1 - x \text{ et } w_1(x) = x \ \ (w_0(x_i) = \delta_{0i} \text{ et } w_1(x_i) = \delta_{1i}.$$

On a en effet, pour chaque indice $i \in \{1, 2, ..., N+1\}$,

$$w^i(x) = \begin{cases} w_1(\frac{x - x_{i-1}}{h}) \text{ si } x \in [x_{i-1}, x_i], \\ w_0(\frac{x - x_i}{h}) \text{ si } x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0 \text{ sur les autres intervalles .} \end{cases} \tag{4.6}$$

Remarque 4.2.1 *On peut aussi utiliser la fonction " mère " $\varphi(x) = 1 - |x|$ définie sur $[-1, 1]$. Dans ce cas on a $\varphi^i(x) = \varphi(\frac{x - x_i}{h})$, $\forall i$.*

4.2.3 Calcul de la matrice A

Comme les fonctions de base ont leur support dans $[x_{i-1}, x_{i+1}]$, on

$$A_{i,j} = 0 \text{ si } |i-j| \geq 2.$$

Ainsi on est amené à calculer :

1. si $i \leq N$, $A_{i,i}$, $A_{i,i-1}$ et $A_{i,i+1}$ et comme la matrice est symétrique, on aura $A_{i-1,i}$ et $A_{i+1,i}$
2. si $i = N+1$, $A_{i,i}$ et $A_{i-1,i}$.

La matrice A est **tridiagonale**.

Pour $i \neq N+1$

$$A_{i,i} = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (w^i(x)')^2 + c(x)(w^i(x))^2 dx,$$

$$A_{i,i-1} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (w^i(x))'(w^{i-1}(x)') + c(x)w^i(x)w^{i-1}(x)dx,$$

$$A_{i,i+1} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (w^i(x)')(w^{i+1}(x)') + c(x)w^i(x)w^{i+1}(x)dx$$

et pour $i = N+1$

$$A_{N+1,N+1} = \int_{x_N}^{b} (w^{N+1}(x)')^2 + c(x)(w^{N+1}(x))^2 dx,$$

$$A_{N+1,N} = \int_{x_N}^{b} (w^{N+1}(x)')(w^N(x)') + c(x)w^{N+1}(x)w^N(x)dx.$$

Prenons $c(x) = c_0$ et $f(x) = f_0$ sur $[a, b]$. On va utiliser les fonctions de base de l'élément de référence pour calculer les coefficients. Par exemple :

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} w^i(x)w^{i-1}(x)\, dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} w_1(\frac{x - x_{i-1}}{h})w_0(\frac{x - x_{i-1}}{h})\, dx.$$

On fait le changement de variable $y = \frac{x-x_{i-1}}{h}$. D'où,

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} w_1(\frac{x-x_{i-1}}{h}) w_0(\frac{x-x_{i-1}}{h})\, dx.$$

$$= h \int_0^1 w_1(y) w_0(y)\, dy$$

$$= h \int_0^1 (1-y) y\, dy = \frac{h}{6}.$$

De même, on a pour $i \neq N+1$

$$A_{i,i} = \frac{2}{h} + c_0 \frac{2h}{3}$$

$$A_{i,i-1} = A_{i,i+1} = \frac{-1}{h} + c_0 \frac{h}{6}$$

et

$$A_{N+1,N+1} = \frac{1}{h} + c_0 \frac{h}{3}$$

$$A_{N,N+1} = \frac{-1}{h} + c_0 \frac{h}{6}$$

et tous les autres coefficients sont nuls.

4.2.4 Calcul de b

On a de la même manière :

$$\begin{cases} b_i = h f_0 \text{ pour } i \neq N+1 \\ b_{N+1} = \frac{h f_0}{2} + \beta. \end{cases}$$

4.2.5 Programmation de la méthode

La matrice étant symétrique et définie positive, plusieurs méthodes sont possibles pour résoudre le système, voir [1], [11] et [3] :

1. méthodes directes, **factorisation de Gauss ou de Choleski**

2. méthodes itératives de type **Gauss-Seidel ou gradient conjugué**.

Dans le cas d'une matrice tridiagonale, la factorisation de Gauss est particulièrement simple à implémenter. La méthode est la suivante : A admet **la factorisation** LU c'est à dire

$$A = LU$$

avec

$$L = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ l_1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & l_N & d_{N+1} \end{pmatrix}$$

et

$$U = \begin{pmatrix} 1 & v_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & v_N \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les éléments non nuls sont déterminés par les relations :

$$L_{i,i-1} = l_{i-1}, \quad L_{i,i} = d_i,$$
$$U_{i,i+1} = v_i, \quad U_{i,i} = 1.$$

On calcule les coefficients de L et U avec les égalités :

$$\begin{aligned} A_{i,i} &= L_{i,i-1}U_{i-1,i} + L_{i,i}U_{i,i} \\ &= v_{i-1}l_{i-1} + d_i. \\ A_{i,i-1} &= L_{i,i-1}U_{i-1,i-1} = l_{i-1}, \\ A_{i,i+1} &= L_{i,i}U_{i,i+1} = d_i v_i. \end{aligned}$$

Une fois les matrices L et U calculées, il est facile de résoudre le système $AX = b$ en 2 étapes successives, la première qualifiée de **descente** où on résout le système triangulaire inférieure $Lz = b$ puis la deuxième étape appelée étape de **remontée** qui est consacrée à la résolution du sytème triangulaire supérieur $UX = z$.

4.2.6 Algorithme de Gauss

C'est le suivant, ($N_h = N + 1$) :

1. poser $d_1 = A_{1,1}$, $z_1 = \frac{b_1}{d_1}$, $v_1 = \frac{A_{1,2}}{d_1}$
2. boucle sur $i = 2, ..., N + 1$ (factorisation de descente)

$$l_{i-1} = A_{i,i-1}$$

$$d_i = A_{i,i} - v_{i-1} l_{i-1}$$

$$v_i = \frac{A_{i,i+1}}{d_i}$$

$$z_i = \frac{(b_i - l_{i-1} z_{i-1})}{d_i}$$

3. Initialisation de la remontée

$$u_{N+1} = z_{N+1}$$

4. boucle $j = N, N - 1, ..., 1$ (remontée)

$$u_i = z_i - v_i u_{i+1}$$

Dans cette méthode, on stocke les coefficients l_i d_i et v_i des matrices L et U dans des tableaux unidimensionnels. Par ailleurs un seul tableau x suffit à stocker b, z puis la solution x. Au départ ce tableau contient les valeurs du second membre. Au fur et à mesure de l'étape de descente, on remplace $x(i) = b_i$ par z_i ce qui s'écrit :

$$x(i) = \frac{(x(i) - l_{i-1} x(i-1))}{d(i)}.$$

Puis on agit de même durant l'étape de remontée en remplacant au fur et à mesure de cette étape (i décroit de $N + 1$ à 1) la valeur $x(i) = z_i$ par u_i ce qui s'écrit

$$x(i) = x(i) - v(i) x(i+1).$$

4.2.7 Estimation de l'erreur

On va montrer le résultat suivant.

Proposition 4.2.1 *Supposons que c et f sont continues sur $[a,b]$ de sorte que la solution exacte u est $C^2([a,b])$. Si u_h est la solution du problème discret* (4.3) *alors il existe une constante $C \geq 0$ tel que*

$$||u - u_h||_V \leq Ch$$

où $C = C(u'', b, a, M, \alpha)$.

preuve : On rappelle que $V = \{v \in H^1(]a,b[), \;\; v(a) = 0\}$. On munit V de la norme

$$||v||_V = ||v'||_{L^2([a,b])}$$

équivalente à la norme de $H^1(]a,b[)$.
D'après **le lemme de Cea**, on a

$$||u - u_h||_V \leq \frac{M}{\alpha}||u - v_h||_V, \;\; v_h \in V_h.$$

Choisissons un élément v_h particulier : on prend l'unique élément de V_h qui coincide avec u en chacun des noeuds du maillage noté $\pi_h u$ appelé **interpolé de** u ie, $\pi_h u$ est la seule fonction de V_h qui a les mêmes degrés de liberté que u. On a

$$\pi_h u(x) = \sum_{i=1}^{N+1} u(x_i) w^i(x), \;\; \forall x \in [a,b].$$

On a

$$||u - \pi_h u||_V^2 = \int_a^b (u' - (\pi_h u)')^2 \, dx.$$

Notons $w = u - \pi_h u$. On a $w \in C^2(]x_i, x_{i+1}[)$ et par construction $w(x_i) = w(x_{i+1}) = 0$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que $w'(c) = 0$. On a $\forall x \in]x_i, x_{i+1}[$:

$$w'(x) = \int_c^x w''(t) \, dt$$

$$= \int_c^x u''(t)\,dt.$$

Donc $|w'(x)| \leq sup_{t\in[a,b]}|u''(t)|h$. Ainsi

$$\begin{aligned} ||w'||^2_{L^2(]x_i,x_{i+1}[)} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} |w'(t)|^2\,dt \\ &\leq sup_{t\in[a,b]}|u''(t)|^2h^3. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} ||u-\pi_h u||^2_V &= \sum_{i=0}^{N} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (w'(t))^2\,dt \\ &= \sum_{i=0}^{N} ||w'||^2_{L^2(]x_i,x_{i+1}[)} \\ &\leq (N+1)h^3 sup_{t\in[a,b]}|u''(t)|^2. \end{aligned}$$

Or $h(N+1) = b-a$, on a donc

$$||u-u_h||_V \leq \sqrt{b-a}\, sup_{t\in[a,b]}|u''(t)|\frac{M}{\alpha}\,h.$$

Exercice 4.2.1 *Considérons le problème aux limites :*

$$\left\{ \begin{array}{l} -u(x)^{(4)} + c(x)u(x) = f(x)\ \forall x \in]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \ \ et\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{array} \right. \tag{4.7}$$

avec $c \in L^\infty(]0,1[)$, $f \in L^2(]0,1[)$ *et il existe une constante* $c_0 > 0$ *telle que* $\forall x \in [0,1]$, $c(x) \geq c_0 > 0$.

1. *On suppose que le problème (4.7) a une solution dans* $H^4(]0,1[)$. *Etablir une formulation variationnelle du problème où la solution sera cherchée dans un sous espace de* $H^2(]0,1[)$. *Essayer de montrer que le problème est bien posé en utilisant le théorème de Lax-Milgram et en admettant que la semi-norme* $||u''||_{L^2(]0,1[)}$ *est une norme dans l'espace où on cherchera la solution équivalente à la norme usuelle de* $H^2(]0,1[)$.

2. *Avec les notations du cours, on définit l'espace discret*

$$V_h = \{v_h \in \tilde{V}_h,\ \ v_h(0) = v_h(1) = v_h'(0) = v_h'(1) = 0\}$$

avec

$\tilde{V}_h = \{v_h \in C^1([a,b])$ *et* $(v_h)_{/[x_i,x_{i+1}]} \in P_3,\, \forall i \in \{0,1,2,...,N+1\}\}$

où P_3 *est l'espace des polynomes de degré inférieur ou égal à trois. Montrer que les fonctions de* $\tilde{V}_h$ *sont entièrement déterminées par les valeurs qu'elles prennent ainsi que leur dérivée première en chacun des points* $x_i,\ i \in \{0,1,2,...,N+1\}$*. En déduire que la dimension de* $\tilde{V}_h$ *est* $2(N+2)$ *et une base de* $\tilde{V}_h$ *est formée des fonctions* u^i *et* v^i $i \in \{0,1,2,...,N+1\}$ *suivantes :*

$$u^i(x_j) = \delta_{ij} \text{ et } (u^i)'(x_j) = 0$$

$$v^i(x_j) = 0 \text{ et } (v^i)'(x_j) = \delta_{ij}.$$

Montrer alors que :

$$\forall v_h \in \tilde{V}_h,\, v_h(x) = \sum_{i=0}^{N+1} v_h(x_i)u^i(x) + \sum_{i=0}^{N+1} v_h'(x_i)v^i(x).$$

3. *Donner une base de* V_h *et montrer que l'espace* $V_h \subset H_0^2(]0,1[)$.
4. *En déduire le problème discret associé au problème* (4.7).
5. *Quels sont les degrés de liberté de la méthode des éléments finis ?*
6. *Calculer les quatre uniques polynômes de degré inférieur ou égal à trois définis sur l'élément de référence* $[0,1]$ *vérifiant :*

$$u_0(0) = 1,\, u_0(1) = u_0'(0) = u_0'(1) = 0,$$

$$u_1(1) = 1,\, u_1(0) = u_1'(0) = u_1'(1) = 0,$$

$$v_0'(0) = 1,\, v_0(0) = v_0(1) = v_0'(1) = 0,$$

$$v_1'(1) = 1,\, v_1(0) = v_1(1) = v_1'(0) = 0.$$

Les tracer.

7. *En déduire les fonctions de base de V_h en fonction des quatre fonctions calculées et les tracer.*
8. *On cherhe la solution sous la forme*

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i u^i(x) + \sum_{i=1}^{N} \mu_i v^i(x).$$

Ecrire le problème que vérifient les inconnues $(\lambda_1, .., \lambda_N, \mu_1, .., \mu_N)$. Donner la matrice et le second membre du système linéaire qui résulte de cette méthode d'approximation.

9. *Tracer (sur papier logarithmique si possible) $log(||u - u_h||_V)$ en fonction de $log(h)$. En déduire le taux de convergence de la méthode.*

Indications *:*

1. *Faire deux intégrations par parties et prendre*

$$V = \{v \in H^2(\Omega),\ v(0) = v(1) = v'(0) = v'(1) = 0\}.$$

Appliquer le théorème de Lax-Milgram sachant qu'il existe deux constantes C_1 et C_2 telles que

$$C_1||u''||_{L^2(]0,1[)} \leq ||u||_{H^2(]0,1[)} \leq C_2||u''||_{L^2(]0,1[)} \forall u \in H_0^2(]0,1[).$$

2. *On pourra écrire que $\forall x \in [x_i, x_{i+1}]$, $v_h(x) = a(x - x_i)^3 + b(x - x_i)^2 + c(x - x_i) + d$.*
3. *Prendre les fonctions u^i et v^i.*
4. *Utiliser V_h*
5. *Il doit y avoir autant de degrés de liberté que d'éléments dans V_h.*
6. *On trouve $u_0(x) = (1 - 2x)(1 - x)^2$, $u_1(x) = (3 - 2x)x^2$, $v_0(x) = x(1 - x)^2$ et $v_1(x) = -(1 - x)x^2$.*
7. $$u^i(x) = \begin{cases} u_1(\frac{x - x_{i-1}}{h}) \text{ si } x \in [x_{i-1}, x_i], \\ u_0(\frac{x - x_i}{h}) \text{ si } x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0 \text{ sur les autres intervalles .} \end{cases}$$

$$v^i(x) = \begin{cases} hv_1(\frac{x-x_{i-1}}{h}) \text{ si } x \in [x_{i-1}, x_i], \\ hv_0(\frac{x-x_i}{h}) \text{ si } x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0 \text{ sur les autres intervalles .} \end{cases}$$

8. *On pourra écrire le vecteur des composantes de u_h dans la base de V_h sous la forme $X = (X_1, X_2), X_1 \in I\!R^N$, $X_2 \in I\!R^N$, X_1 et X_2 correspondants aux composantes λ_j et μ_j respectivement.*
9. *Le taux de convergence doit être deux!*

Remarque 4.2.2 1. *Dans le cours la méthode d'approximation exposée pour le problème* (4.1) *utilise des fonctions affines par morceaux car on doit approcher l'espace H^1. On construit alors un espace de dimension finie inclus dans C^0, ce qui se fait avec des polynômes de degré inférieur ou égal à un par morceaux. Par contre, dans l'exercice 4.2.1, on a besoin d'approcher* **l'espace de Sobolev** H^2, *ce qui s'obtient en construisant des fonctions C^1. D'où l'utilisation de fonctions polynomiales de degré trois par morceaux pour construire des fonctions C^1. Avec des fonctions affines par morceaux, on ne peut pas approcher correctement des fonctions C^1.*

2. *Le plus souvent les fonctions de base sont polynômiales par morceaux dont le support est dans quelques mailles pour avoir une matrice creuse. Mais on peut utiliser d'autres fonctions.*

Chapitre 5

Méthode des éléments finis en dimension 2

5.1 Généralités

On doit résoudre un problème du type :

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + c(x)u(x) = f(x) \ \forall x \in \Omega \\ u(x) = 0 \text{ sur } \Gamma \end{cases} \tag{5.1}$$

où Ω est un ouvert borné non vide et régulier du plan.

Le principe consiste à écrire une formulation variationnelle associée à (5.1) puis de résoudre ce problème sur un espace de dimension finie inclus dans $H_0^1(\Omega)$.

La construction de l'espace de dimension finie exige un maillage de Ω qui satisfait certaines règles.

On recouvre Ω par des éléments de forme simple par exemple des rectangles, des triangles.

Soit (T_k), $k \in \{1, .., N_T\}$ les éléments de petite taille qui recouvrent Ω. On note

$$h = max_{k\in\{1,..,N_T\}}(diam(T_k))$$

où $diam(T_k)$ est le diamètre de l'élément T_k. On désigne par τ_h l'ensemble de tous de les éléments $\{T_k\}$; τ_h s'appelle une **triangulation** de Ω.
Pour simplifier, supposons que Ω est à frontière polygonale. Donc, on a

$$\overline{\Omega} = \cup_{T \in \tau_h} T.$$

On dit que la triangulation est **admissible** si l'intersection entre deux éléments est soit vide, soit réduite à un point, soit un côté tout entier.
Pour la convergence de la méthode, il est nécessaire que la condition suivante soit satisfaite : il existe $C > 0$ tel que pour tout $h > 0$,

$$sup_{T \in \tau_h} \frac{h(T)}{\rho(T)} \leq C$$

où $\rho(T)$ désigne le diamètre du cercle inscrit dans l'élément T. On dit que la triangulation est **régulière** si la condition est remplie. Cette condition permet d'éviter des éléments trop applatis.

5.2 Approximation par des éléments finis rectangulaires Q^1

Le problème (5.1) s'écrit sous forme variationnelle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \;\text{ tel que} \\ a(u,v) = L(v) \; \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right. \tag{5.2}$$

avec

$$V = H_0^1(\Omega),$$
$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega c(x)u(x)v(x)\, dx,$$
$$L(v) = \int_\Omega f(x)v(x)\, dx.$$

Le théorème de Lax-Milgram assure l'existence et l'unicité de la solution dans $H_0^1(\Omega)$.

On suppose que Ω est le carré unité $[0,1] \times [0,1]$. On recouvre Ω par $N_T = (N_1+1)(N_2+1)$ rectangles R_k, $k \in \{1,..,N_T\}$ de taille $h_1 = 1/(N_1+1)$ dans la direction de x_1 et $h_2 = 1/(N_2+1)$ dans la direction de x_2. On note $h = max(h_1, h_2)$.
On note $q^1, i \in \{1,..,(N_1+1)(N_2+1)\}$ les points du maillage, $N_S = (N_1+1)(N_2+1)$ et $N_i = N_1 * N_2$ le nombre de sommets internes.

5.2.1 Espace discret V_h

On note Q^1 l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à un par rapport à chacune des deux variables x_1 et x_2. Cet espace est engendré par 1, x_1, x_2, x_1x_2. En fait il est engendré par les produits tensoriels de fonctions affines en x_1 par des fonctions affines en x_2, $((f \otimes g)(x) = f(x_1)g(x_2))$. On notera $Q^1 = vect(P^1 \otimes P^1)$ avec P^1 l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à un engendré par 1, x_1 et x_2.
Introduisons l'espace discret V_h défini par

$$V_h = \{v_h \in \tilde{V_h},\ \ v_{h\Gamma} = 0\},$$

avec

$$\tilde{V_h} = \{v_h \in C^0(\Omega) \text{ tel que } (v_h)_{/R_k} \in Q^1\ \ \forall k \in \{0,1,2,...,N_T\}\}.$$

La proposition suivante permet de définir une base de $\tilde{V_h}$ et de donner les degré de liberté des fonctions de et espace.

Proposition 5.2.1 *1. Les fonctions de $\tilde{V_h}$ sont entièrement déterminées par les valeurs qu'elles prennent en chacun des N_S sommets q^i du maillage.*

2. La dimension de $\tilde{V_h}$ est N_S et une base de $\tilde{V_h}$ est formée des fonctions w^i, $i \in \{0,1,2,...,N_S\}$ suivantes : $w^i \in \tilde{V_h}$, $w^i(q^j) = \delta_{ij}$ (indice de Kronecker).

Ces fonctions sont appelées **fonctions chapeaux** *en raison de leur graphe et on a :*

$$\forall v_h \in \tilde{V_h},\, v_h(x) = \sum_{i=0}^{N_S} v_h(q_i) w^i(x).$$

Les scalaires $v_h(q_i),\ i \in \{0, 1, 2, ..., N_S\}$ *sont les* **degrés de liberté** *de la fonction* $v_h \in \tilde{V_h}$.

3. $\tilde{V_h} \subset H^1(\Omega)$ *et pour toute fonction* $v_h \in \tilde{V_h}$ *on a au sens des distributions*

$$\frac{\partial v_h}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{NT} \chi_{R_k} \frac{\partial}{\partial x_i}(v_{h/R_k}).$$

preuve : Soit $v_h \in \tilde{V_h}$ et R_k un rectangle de sommets A^1, A^2, A^3 et A^4 de la triangulation. Montrons que la restriction de v_h à ce rectangle est entièrement déterminée par les valeurs qu'elle prend aux quatre sommets A^i, $\forall i \in \{1, 4\}$. Notons (x_1^i, x_2^i) les coordonnées du sommet A^i. Par définition de $\tilde{V_h}$, il existe des scalaires α, β, γ, et δ tel que pour tout $x = (x_1, x_2) \in R_k$ on ait

$$v_h(x) = \alpha + \beta(x_1 - x_1^1) + \gamma(x_2 - x_2^1) + \delta(x_1 - x_1^1)(x_2 - x_2^1).$$

Le problème revient à calculer les quatre coefficients α, β, γ et δ. On a :

$$h_1 = x_1^2 - x_1^1 = x_1^3 - x_1^4,$$
$$h_2 = x_2^3 - x_2^2 = x_2^4 - x_2^2.$$

D'où :

$$\begin{cases} \alpha = v_h(A^1) \\ \alpha + \beta h_1 = v_h(A^2) \\ \alpha + \gamma h_2 = v_h(A^4) \\ \alpha + \beta h_1 + \gamma h_2 + \delta h_1 h_2 = v_h(A^3) \end{cases}$$

On a un système triangulaire dont le déterminant vaut $1 h_1 h_2 h_1 h_2 = (h_1 h_2)^2 \neq 0$.

La restriction à chaque rectangle étant parfaitement déterminée, la fonction v_h est parfaitement connue sur Ω.

Pour 2. : d'après ce qui précède, le nombre de degrés de liberté est N_S (la dimension de l'espace des fonctions Q^1 par morceaux sur Ω est N_S), donc la dimension de $\tilde{V_h} \leq N_S$. Pour montrer l'égalité, il suffit de montrer que les fonctions Q^1 par morceaux sont continues sur $\overline{\Omega}$. Comme les fonctions sont continues à l'intèrieur de chacun des rectangles, il suffit de montrer que le raccord à l'interface entre deux rectangles R_k et $R_{k'}$ est continu.

Placons nous dans le cas suivant où (AB) est l'interface entre 2 rectangles R_k et R_k' et elle est parallèle à (Ox_2).
On note $v = v_{h_{/R_k}}$ et $v' = v_{h_{/R_{k'}}}$. On a

$$(v - v')(A) = (v - v')(B) = 0.$$

Or $v - v'$ est une fonction polynomiale de degré un de la variable x_2, ($x_1 = cte$) qui s'annule en A et B. Donc $v = v'$ sur $[A, B]$. v_h se raccorde de manière continue à l'interface entre les deux rectangles. On a donc $dim(\tilde{V_h}) = N_S$.

Montrons que la famille est libre : soient N_S scalaires $\lambda_1, ..., \lambda_{N_S}$ tel que la fonction $v_h(x) = \sum_{j=1}^{N_S} \lambda_j w^j(x)$ soit nulle. En particulier,

$$\forall i \in \{1, 2, ..., N_S\},\ 0 = v_h(q^i) = \sum_{j=1}^{N_S} \lambda_j w^j(q^i) = \lambda_i.$$

Chacun des coefficients λ_i est donc nul, et la famille est libre.
Comme elle comporte N_S éléments, c'est une base de $\tilde{V_h}$ et tout élément $v_h \in \tilde{V_h}$ s'écrit sous la forme

$$v_h(x) = \sum_{j=1}^{N_S} v_h(q^j) w^j(x).$$

Montrons le troisième point (plus chaud ! facultatif).
Soit $v_h(x) \in \tilde{V_h}$, $v_h \in L^2(\Omega)$ car $v_h \in L^\infty(\Omega)$ et Ω est borné. Montrons

que $\frac{\partial v_h}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial v_h}{\partial x_2}$ appartiennent à $L^2(\Omega)$.

$$\forall \varphi \in D(\Omega), \quad < \frac{\partial v_h}{\partial x_1}, \varphi >= - < v_h, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} >$$

$$= - \sum_{k=1}^{N_T} \int_{R_k} v_h \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$$

$$= \sum_{k=1}^{N_T} \int_{R_k} \frac{\partial v_h}{\partial x_1} \varphi - \int_{\partial R_k} [v_h \varphi \nu_{i,k}] \, d\sigma$$

où $\nu_{i,k}$ est la i eme composante de la normale sortante ν_k de R_k. Montrons que le terme sur le bord est nul :

1. soit ∂R_k fait partie du bord de Ω et dans ce cas $\varphi = 0$,
2. soit ∂R_k est une arête interne et dans ce cas si on note (AB) cette arête comme $\nu_k = -\nu_{k'}$ on a

$$\int_{[AB]} v_h \varphi \nu_{i,k} + \int_{[AB]} v_h \varphi \nu_{i,k'} = 0, \quad \forall i = 1, 2.$$

   D'où

$$< \frac{\partial v_h}{\partial x_1}, \varphi >= \sum_{k=1}^{N_T} < \chi_{R_k} \frac{\partial}{\partial x_i} (v_{h_{/R_k}}) \varphi > .$$

   Ainsi, on a

$$(\frac{\partial v_h}{\partial x_1})_{/R_k} = \frac{\partial (v_{h_{/R_k}})}{\partial x_1}.$$

   Donc, $\frac{\partial v_h}{\partial x_1} \in L^2(\Omega)$.

Par commodité d'écriture, on admet par la suite que les sommets internes du maillage correspondent aux indices $i \in \{1, N_i\}$. Pour l'espace discret V_h, on a le résultat suivant.

Corollaire 5.2.1 *1. Les fonctions de V_h sont entièrement déterminées par les valeurs qu'elles prennent en chacun des N_i sommets internes du maillage*

2. $dimV_h = N_i$ *et*

$$\forall v_h \in V_h,\ v_h(x) = \sum_{i=1}^{N_i} v_h(q_i) w^i(x).$$

Les scalaires $v_h(q^i)$ *pour* $i \in \{1, N_i\}$ *sont les degrés de libertés de la fonction* v_h*.*

3. $V_h \subset H_0^1(\Omega)$.

preuve : $v_h = \sum_{i=1}^{N_S} v_h(q_i) w^i(x)$ car $v_h \in \tilde{V_h}$. Comme $v_h(q^i) = 0$ pour tout $q^i \in \Gamma$, on a

$$v_h = \sum_{i=1}^{N_i} v_h(q_i) w^i(x).$$

Cette famille est génératrice et libre donc c'est une base de V_h.

5.2.2 Calcul de u_h

Le problème discret est :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V_h \ \text{ tel que} \\ a(u_h, v) = L(v)\ \forall v \in V_h. \end{cases} \tag{5.3}$$

où V_h est l'espace décrit dans le corollaire précédent. On cherche alors u_h sous la forme

$$u_h = \sum_{i=1}^{N_i} x_i w^i(x)$$

où les coefficients x_i pour $i \in \{1, N_i\}$ sont déterminés en résolvant le système

$$AX = b$$

avec

1. $X = (x_1, x_2, ...x_{N_i})$
2. $A = (A_{i,j}),\ 1 \leq i \leq N_i,\ 1 \leq j \leq N_i$

$$A_{i,j} = a(w^j, w^i)$$

3. $b = (b_i)_{i=1,N_I}$,

$$b_i = L(w^i)$$

Ce qui suit explique le calcul de la matrice A et du second membre b par un procédé appelé **assemblage**.
On a

$$A_{i,j} = \int_\Omega \nabla w^i \nabla w^j + c w^i w^j$$

$$= \sum_{k=1}^{N_T} A_{i,j}(R_k)$$

avec

$$A_{i,j}(R_k) = \int_{R_k} \nabla w^i \nabla w^j + c w^i w^j.$$

$$b_i = \int_\Omega f w^i = \sum_{k=1}^{N_T} b_i(R_k)$$

où

$$b_i(R_k) = \int_{R_k} f w^i.$$

Cette écriture montre que le calcul de A et b se ramène à une somme de contributions élémentaires $A_{i,j}(R_k)$ et $b_i(R_k)$ sur chacun des rectangles formant la triangulation.

Par ailleurs, pour un rectangle R_k donné, n'intervient dans le calcul effectif de $A_{i,j}(R_k)$ que les indices i et j associés à des sommets q^i et q^j qui appartiennent à R_k, (si q^i ou q^j n'appartient pas à R_k alors $A_{i,j}(R_k) = 0$).
On est donc ramené à un calcul local c'est à dire sur chacun des rectangles de la triangulation. Pour calculer les contributions élémentaires, il suffit de déterminer les bases locales sur chacun des rectangles.

5.2.3 Calcul des fonctions de base d'un rectangle quelconque

On va calculer quatre polynômes p^i de type Q^1 associés au rectangle R_k tel que

$$p^i(A^j) = \delta ij.$$

Expliquons le calcul pour p^1. On a

$$p^1(A^2) = p^1(A^3) = 0$$

et sur la droite (A^2A^3) p^1 est affine en x_2 donc $p^1 = 0$ sur (A^2A^3) d'équation $x_1 = x_1^2$. De même p^1 est nul sur (A^3A^4) d'équation $x_2 = x_2^4$. Ainsi, on a

$$p^1(x_1, x_2) = C(x_1 - x_1^2)(x_2 - x_2^4)$$

où $C \in I\!R$. Or $p^1(A^1) = 1$, donc on a $C = 1/h_1h_2$. D'où

$$p^1(x) = \frac{1}{h_1h_2}(x_1 - x_1^2)(x_2 - x_2^4).$$

De même, on a

$$p^2(x) = -\frac{1}{h_1h_2}(x_1 - x_1^1)(x_2 - x_2^4),$$

$$p^3(x) = \frac{1}{h_1h_2}(x_1 - x_1^1)(x_2 - x_2^1),$$

$$p^4(x) = -\frac{1}{h_1h_2}(x_1 - x_1^2)(x_2 - x_2^1).$$

Quel est le lien entre les **les fonctions de base locales** p^i pour $i \in \{1, 4\}$ et **les fonctions de base globales** w^i pour $i \in \{1, N_i\}$?

Soit q^i un point du maillage et w^i la fonction de base globale qui lui est associée d'apres le corollaire (3.3.1). Soit $R_k \in \tau_h$, on a

1. si $q^i \notin R_k$, $(w^i)_{/R_k} = 0$,
2. si $q^i \in R_k$, par exemple $q^i = A^3$, alors on a

$$(w^i)_{/R_k} = p^3$$

c'est à dire

$$(w^i)_{/R_k} = \frac{1}{h_1h_2}(x_1 - x_1^1(R_k))(x_2 - x_2^1(R_k)).$$

Remarque 5.2.1 La restriction à un rectangle d'une fonction de base globale est une fonction de base locale.

Ainsi, en ayant calculer des fonctions de base locales de type Q^1 sur chaque rectangle, on peut calculer les contributions élémentaires $A_{i,j}(R_k)$ et $b_i(R_k)$ sur chaque rectangle R_k de la triangulation.

Le calcul des contributions élémentaires se fait le plus souvent en utilisant un élément de référence, ici le carré unité $[0,1] \times [0,1]$.

5.2.4 Calcul des fonctions de base du rectangle de référence

Ici $R =]0,1[\times]0,1[$. La **tranformation affine** qui permet de passer de R à R_k un rectangle quelconque de la triangulation τ_h vérifiant

$$F_k(A^i) = A^i(R_k)\ \forall i$$

est

$$\forall (x_1, x_2) \in R, \quad F_k(x_1, x_2) = A^1(R_k) + x_1\overrightarrow{A^1(R_k)A^2(R_k)} + x_2\overrightarrow{A^1(R_k)A^4(R_k)}.$$

On a $F_k(R) = R_k$
Les quatre fonctions de base sur R sont les quatre polynômes p_i tel que $p_i(A^j) = \delta_{ij}$.
On trouve

$$p_1(x) = (1 - x_1)(1 - x_2),$$

$$p_2(x) = x_1(1 - x_2),$$

$$p_3(x) = x_1x_2,$$

$$p_4(x) = (1 - x_1)x_2.$$

On a
$$\forall i \in \{1,4\},\ p^i(F_k(x)) = p_i(x),\ \forall x \in R.$$
Donc si on connait les fonctions de base de l'élément de référence, on connait les fonctions de base locales du rectangle R_k pour tout $k \in \{1, N_T\}$. Evidemment, si on considère un autre rectangle de la triangulation, la transformation affine est modifiée par contre les quatre fonctions de base p_i restent inchangées.

5.2.5 Exemple de calcul des blocs de la formulation

Si $c = c_0 \in I\!R$, calculons par exemple
$$A_{i,i}(R_k) = \int_{R_k} |\nabla w^i|^2 + c_0|w^i|^2\,dx.$$
Si par exemple $q^i = A^3$, on a
$$w^i_{/R_k} = p^3(x) = p_3(y) = y_1y_2$$
avec $y = F_k^{-1}(x) = (\frac{x_1 - x_1^1(R_k)}{h_1}, \frac{x_2 - x_2^1(R_k)}{h_2})$.
Ainsi $y_1 = \frac{x_1 - x_1^1(R_k)}{h_1}$ et $y_2 = \frac{x_2 - x_2^1(R_k)}{h_2}$. De sorte que
$$\nabla w^i(x) = (\frac{\partial w^i}{\partial x_1}, \frac{\partial w^i}{\partial x_2}) = (\frac{y_2}{h_1}, \frac{y_1}{h_2}).$$
D'où, en faisant le changement de variable $x = F_k(y)$, on obtient :
$$\int_{R_k} |\nabla w^i(x)|^2\,dx = \int_R (\frac{y_2^2}{h_1^2} + \frac{y_1^2}{h_2^2}) h_1h_2dy \ = \frac{h_1h_2}{3}(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}).$$
Remarque 5.2.2 *On n'oublie pas le jacobien J qui vaut h_1h_2 car $\int_{R_k} dx = \int_R Jdy$.*

Si on calcule la deuxième intégrale de la même manière, on a
$$A_{i,i}(R_k) = \frac{h_1h_2}{3}(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}) + c_0\frac{h_1h_2}{9}.$$

Si on calcule la contribution des quatre rectangles (q^i est supposé être un sommet interne), on a

$$A_{i,i} = 4(\frac{h_1 h_2}{3}(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}) + c_0 \frac{h_1 h_2}{9}).$$

5.3 Approximation par des éléments finis triangulaires P^1

Ω est supposé de frontière polygonale de sorte qu'il est entièrement recouvert par N_T triangles $T_k,\ \ \forall k \in \{1, 2, .., N_T\}$ de taille maximale h. On note $q^i,\ \ i \in \{1, 2, .., N_S\}$ les points du maillage et N_i le nombre de sommets internes.

5.3.1 Espace discret

On désigne par P^1 l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à un. Il est engendré par 1, x_1 et x_2. On définit

$$V_h = \{v_h \in \tilde{V_h},\ v_{h/\Gamma} = 0\},$$

avec

$$\tilde{V_h} = \{v_h \in C^0(\overline{\Omega}),\ v_{h/T_k} \in P^1,\ \forall k \in \{1, .., N_T\}\}.$$

Proposition 5.3.1 *1. Les fonctions de $\tilde{V_h}$ sont entièrement déterminées par les valeurs qu'elles prennent en chacun des N_S sommets q^i du maillage.*

2. La dimension de $\tilde{V_h}$ est N_S et une base de $\tilde{V_h}$ est formée des fonctions $w^i,\ \ i \in \{0, 1, 2, ..., N_S\}$ suivantes : $w^i \in \tilde{V_h}$, $w^i(q^j) = \delta_{ij}$ (indice de Kronecker).

Ces fonctions sont appelées **fonctions chapeaux** *en raison de leur graphe et on a :*

$$\forall v_h \in \tilde{V_h},\ v_h(x) = \sum_{i=0}^{N_S} v_h(q_i) w^i(x).$$

Les scalaires $v_h(q_i)$, $i \in \{0, 1, 2, ..., N_S\}$ sont les **degrés de liberté** *de la fonction $v_h \in \tilde{V_h}$.*

3. *$\tilde{V_h} \subset H^1(\Omega)$ et pour toute fonction $v_h \in \tilde{V_h}$ on a au sens des distributions*
$$\frac{\partial v_h}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{NT} \chi_{R_k} \frac{\partial}{\partial x_i}(v_{h/R_k}).$$

démonstration : Dans un triangle T_k de la triangulation v_h s'écrit
$$v_h(x) = \alpha + \beta x_1 + \delta x_2.$$
Les coefficients sont solution du système :
$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \alpha & + & \beta x_1^1 & + & \delta x_2^1 & = & v_h(A^1) \\ \alpha & + & \beta x_1^2 & + & \delta x_2^2 & = & v_h(A^2) \\ \alpha & + & \beta x_1^3 & + & \delta x_2^3 & = & v_h(A^3) \end{array} \right.$$
Son déterminant est
$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} 1 & x_1^1 & x_2^2 \\ 1 & x_1^2 & x_2^2 \\ 1 & x_1^3 & x_2^3 \end{vmatrix}$$
On a
$$\mathcal{D} = \overrightarrow{A^1A^2} \wedge \overrightarrow{A^1A^4} = \pm 2 \text{ aire}(T_k) = (x_1^2 - x_1^1)(x_2^3 - x_2^1) - (x_1^3 - x_1^1)(x_2^2 - x_2^1) \neq 0.$$
La restriction de v_h est parfaitement déterminée par les valeurs aux trois sommets du triangle T_k. La dimension de $dim\tilde{V_h} \leq N_S$. Pour avoir $dim\tilde{V_h} = N_S$ il suffit de montrer que les fonctions P^1 par morceaux sont continues sur $\overline{\Omega}$. Pour cela, il suffit de montrer que le raccord entre deux triangles T_k et $T_{k'}$ est continue.
Placons nous dans le cas où (AB) est l'interface entre 2 triangles.
On note $v = v_{h/T_k}$ et $v' = v_{h/T_{k'}}$. On a
$$(v - v')(A) = (v - v')(B) = 0.$$
Soit $M \in [A, B]$, il existe $\lambda \in I\!R$ tel que $M = \lambda A + (1 - \lambda)B$. Ainsi,
$$(v - v')(M) = (v - v')(\lambda A + (1 - \lambda)B) = \lambda(v - v')(A) + (1 - \lambda)(v - v')(B) = 0.$$

Ainsi $dim\tilde{V_h} = N_S$ Le reste de la démonstration se fait de la même manière que pour la proposition (5.2.1). Par commodité d'écriture, on admet par la suite que les sommets internes du maillage correspondent aux indices $i \in \{1, N_i\}$. Pour l'espace discret V_h, on a le résultat suivant.

Corollaire 5.3.1 *1. Les fonctions de V_h sont entièrement déterminées par les valeurs qu'elles prennent en chacun des N_i sommets internes du maillage*

2. $dimV_h = N_i$ et

$$\forall v_h \in V_h,\ v_h(x) = \sum_{i=1}^{N_i} v_h(q_i) w^i(x).$$

Les scalaires $v_h(q^i)$ pour $i \in \{1, N_i\}$ sont les degrés de libertés de la fonction v_h.

3. $V_h \subset H_0^1(\Omega)$.

démonstration : identique au corollaire (5.2.1).

5.3.2 Calcul de u_h

Le problème discret est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V_h \ \text{ tel que} \\ a(u_h, v) = L(v)\ \forall v \in V_h. \end{array} \right. \tag{5.4}$$

où V_h est l'espace décrit dans le corollaire précédent. On cherche alors u_h sous la forme

$$u_h = \sum_{i=1}^{N_S} x_i w^i(x)$$

où les coefficients x_i pour $i \in \{1, N_i\}$ sont déterminés en résolvant le système

$$AX = b$$

avec

1. $X = (x_1, x_2, ...x_{N_i})$
2. $A = (A_{i,j}),\ 1 \le i \le N_i,\ 1 \le j \le N_i$

$$A_{i,j} = a(w^j, w^i)$$

3. $b = (b_i)_{i=1,N_I}$,

$$b_i = L(w^i)$$

Ce qui suit explique le calcul de la matrice A et du second membre b par un procédé appelé **assemblage**.
On a

$$\begin{aligned} A_{i,j} &= \int_\Omega \nabla w^i \nabla w^j + c w^i w^j \\ &= \sum_{k=1}^{N_T} A_{i,j}(T_k) \end{aligned}$$

avec

$$A_{i,j}(T_k) = \int_{T_k} \nabla w^i \nabla w^j + c w^i w^j.$$

$$b_i = \int_\Omega f w^i = \sum_{k=1}^{N_T} b_i(T_k)$$

où

$$b_i(T_k) = \int_{T_k} f w^i.$$

5.3.3 Calcul des fonctions de base sur un triangle quelconque

Introduisons la notion de **coordonnées barycentriques** relatif à un triangle T_k.

Proposition 5.3.2 *Soit $M = (x_1, x_2)$ du plan. Il existe un unique triplet $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ de nombres réels tel que*

$$M = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i A^i,\ \ \sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 1.$$

Ces scalaires sont appelés **coordonnées barycentriques** *du point M (un point M peut être repéré par ses coordonnées barycentriques comme par ses coordonnées cartésiennes). On a les propriétés suivantes :*

1. $\lambda_i(A^j) = \delta_{ij}$
2. λ_i *est une fonction affine des coordonnées cartésiennes et les coordonnées cartésiennes sont des fonctions affines des coordonnées barycentriques.*
3. $M \in (A^1, A^2) \Longleftrightarrow \lambda_3(M) = 0$
4. $M \in T_k \Longleftrightarrow 0 \leq \lambda_i(M) \leq 1, \forall i \in \{1, 3\}$.

démonstration : Soit $M = (x_1, x_2)$et $A^i = (x_1^i, x_2^i)$ pour $i = 1, 3$ les trois sommets d'un triangle T_k. Les réels $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ sont solution du système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 1 \\ \lambda_1 x_1^1 & + & \lambda_2 x_1^2 & + & \lambda_3 x_1^3 & = & x_1 \\ \lambda_1 x_2^1 & + & \lambda_2 x_2^2 & + & \lambda_3 x_3^2 & = & x_2 \end{array}\right.$$

Son déterminant est

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 \\ x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 \end{vmatrix}$$

On a

$$\mathcal{D} = \pm 2 \text{ aire}(T_k) \neq 0.$$

Les formules de Cramer donnent :

$$\lambda_1 = \frac{1}{\mathcal{D}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ x_2 & x_2^2 & x_2^3 \end{vmatrix}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{\mathcal{D}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_1 & x_1^3 \\ x_2 & x_2 & x_2^3 \end{vmatrix}$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{\mathcal{D}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_1^2 & x_1 \\ x_2 & x_2^2 & x_2 \end{vmatrix}$$

Donc les fonctions barycentriques sont des fonctions affines de x_1 et x_2. Inversement, x_1 et x_2 s'expriment comme des fonctions affines de λ_1, λ_2 et λ_3.

Montrons 3. : L'équation d'une droite est en coordonnées barycentriques $\alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 + \alpha_3\lambda_3 = 0$ car x_1 et x_2 sont des fonctions affines des coordonnées barycentriques. Soit $M \in (A^1, A^2)$, $A^1 \in (A^1, A^2)$ donc $\alpha_1 = 0$ et $A^2 \in (A^1, A^2)$ donc $\alpha_2 = 0$.

On a :

$$M \in T_k \Longleftrightarrow 0 \leq \lambda_i(M) \leq 1, \, \forall i \in \{1, 3\}.$$

Les coordonnées barycentriques sont données par la formule :

$$\lambda_1 = \frac{aire(T_1)}{aire(T)}$$

où

1. $T_1 = \{M, A^2, A^3\}$
2. $T = \{A^1, A^2, A^3\}$

Par permutations circulaires, on a une expression de λ_2 et λ_3.

5.3.4 Utilisation de l'élément de référence

La transformation affine est définie par

$$\forall (x_1, x_2) \in T, \quad F_k(x_1, x_2) = A^1(T_k) + x_1 \overrightarrow{A^1(T_k)A^2(T_k)} + x_2 \overrightarrow{A^1(T_k)A^3(T_k)}.$$

On a $F_k(T) = T_k$

On note

1. λ_i^T les coordonnées barycentriques dans le triangle T
2. $\lambda_i^{T_k}$ les coordonnées barycentriques dans le triangle T_k.

On a facilement

$$\lambda_1^T(x) = 1 - x_1 - x_2$$
$$\lambda_2^T(x) = x_1$$
$$\lambda_3^T(x) = x_2$$

et

$$\forall i \in \{1,3\}, \quad \lambda_i^{T_k}(F_k(x)) = \lambda_i^T(x).$$

Un exemple d'utilisation dans un calcul d'intégrale :

$$\int_{T_k} \lambda_i^{T_k}(x)\lambda_j^{T_k}(x)\,dx = 2aire(T_k)\int_T \lambda_i^T(y)\lambda_j^T(y)\,dy$$

$$= 2aire(T_k)\int_0^1 y_2 \int_0^{1-y_2} y_1 dy_1 dy_2 = \frac{2aire(T_k)}{24}.$$

On peut montrer que

$$\int_{T_k} (\lambda_i^{T_k}(x))^m(\lambda_j^{T_k}(x))^n(\lambda_k^{T_k}(x))^p\,dx = \frac{2aire(T_k)m!n!p!}{2+m+n+p}$$

où T_k est un triangle de sommets i, j, k.

5.3.5 Assemblage de la matrice

L'algorithme s'écrit

$Tab = 0$

boucle sur $k = 1, N_T$

boucle sur ilocal $= 1, 2, 3$

calcul de l'indice globale i correspondant au point d'indice ilocal sur T_k

boucle sur jlocal $= 1, 2, 3$

calcul de l'indice global j correspondant au point d'indice jlocal sur T_k

calcul de la contribution élémentaire $A_{ij}(T_k)$

$A_{ij}(T_k) = \int_{T_k} \nabla\lambda^{T_k}_{ilocal}\nabla\lambda^{T_k}_{jlocal} + c_0\lambda^{T_k}_{ilocal}\lambda^{T_k}_{ilocal}$

calcul de l'indice ind de stockage du coefficient A_{ij} dans le tableau Tab

$tab(ind) = tab(ind) + A_{ij}(T_k)$

fin boucle local jlocal

fin boucle local ilocal

fin boucle k.

5.3.6 Stockage de la matrice

On va exposer une technique de stockage des éléments non nuls de la matrice A ; C'est très intéressant car la matrice A est creuse. Cette technique s'appelle le **stockage morse** et utilise la méthode format CSR (compression sparse row).
Soit $A(1 : N, 1 : N)$ une matrice creuse contenant nnz éléments non nuls. Pour stocker cette matrice dans le format CSR, nous définissons trois tableaux à une entrée notés $ia(1, N + 1)$, $ja = (1 : nnz)$ et $aa(1 : nnz)$.

1. le tableau ia est destiné à stocker le nombre d'éléments non nuls sur chaque ligne. Plus précisément, $ia(1) = 1$ et nous avons que la valeur $ia(i + 1) - ia(i)$ est égal au nombre d'éléments non nuls

de la ligne i, $i = 1, N$. On a $nnz = ia(N+1) - ia(1)$.

2. ja fournit les indices de colonne des élémentnon nuls. Plus précisément, pour la ligne i, $i = 1, N$, la ligne $(ja(p))_{ia(i) \leq p \leq ia(i+1)-1}$ contient tous les indices des éléments non nuls de la ligne i. Conventionnellement, ja est rangé de sorte que les indices de colonne soient croissnts pour une ligne donnée.
3. le tableau aa contient éléments non nuls de la matrice. Pour un indice de ligne i donné, la liste $(aa(p))_{ia(i) \leq p \leq ia(i+1)-1}$ contient tous les éléments non nuls de la ligne i par ordre d'indice de colonne croissant.

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

On a

$$aa = 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12$$

$$ja = 1\ 4\ 1\ 1\ 2\ 4\ 1\ 3\ 4\ 5\ 3\ 4\ 5$$

et

$$ia = 1\ 3\ 6\ 10\ 12\ 13.$$

Pour retrouver le coefficient a_{km} de la matrice A, on écrira :

pour p = ia(k) à ia(k+1) -1 (on parcourt la ligne k)
    si ja(p) = m alors
    aa(p) est la valeur cherchée
fin de la boucle p

Chapitre 6

Eléments finis

6.1 Introduction

Dans la deuxième approximation de la formulation variationnelle en dimension deux, on a découpé le domaine en triangles, approcher la solution exacte par des polynômes de degré inférieur ou égal à un et les inconnues du problème étaient les valeurs aux sommets internes de chacun des triangles. Le triplet (T, P, Σ) où T est un triangle, $P = P^1$ et $\Sigma = \{p(A^i),\, i \in \{1, 3\}\}$ qui nous a donc servi à construire V_h et à calculer une approximation de la solution exacte s'appelle un élément fini. Précisons les définitions.

6.2 Définitions

Soit un triplet (K, P, Σ) où

1. K est un sous-ensemble fermé de $I\!R^n$ d'intérieur non vide,
2. P est un espace vectoriel sur $I\!R$ de dimension finie de fonctions définies sur K,
3. Σ est un ensemble de formes linéaires sur P de cardinal N et on note $\Sigma = \{\varphi_i\}_{i=1}^{N}$.

Definition 6.2.1 *On dit que* Σ *est* P**-unisolvant** *si et seulement si* *pour tout* $\alpha_i \in I\!R$, $i \in \{1, .., N\}$, *il existe un unique* $p \in P$ *tel que*

$$\varphi_i(p) = \alpha_i, \, \forall i = 1, .., N.$$

Definition 6.2.2 *Le triplet* (K, P, Σ) *est un élément fini de* $I\!R^n$ *si il satisfait 1., 2. et 3. et si* Σ *est* P-**unisolvant**.

6.2.1 Exemples d'éléments finis :

1. $K = [a_1, a_2]$, $P = P^1$ et $\Sigma = \{\varphi_i\}_{i=1,2}$ avec
$$\varphi_i : P^1 \longrightarrow I\!R : p \longrightarrow p(a_i).$$
2. $K = [a_1, a_2]$, $P = P^2$ et $\Sigma = \{\varphi_i\}_{i=1,2,3}$ avec
$$\varphi_i : P^2 \longrightarrow I\!R : p \longrightarrow p(a_i)$$
avec a_3 le milieu du segment $[a_1, a_2]$.
3. K est un triangle de $I\!R^2$, $P = P^1$ et $\Sigma = \{\varphi_i\}_{i=1,2,3}$ avec
$$\varphi_i : P^1 \longrightarrow I\!R : p \longrightarrow p(a_i).$$
4. K est un triangle de $I\!R^2$, $P = P^2$ et $\Sigma = \{\varphi\}_{i=1,2,3} \cup \{\varphi_{ij}\}_{1 \le i < j \le 3}$ avec
$$\varphi_i : P^2 \longrightarrow I\!R : p \longrightarrow p(a_i),$$
$$\varphi_{ij} : P^2 \longrightarrow I\!R : p \longrightarrow p(a_{ij})$$
avec a_i sommets du triangle et $a_{ij} = \frac{a_i + a_j}{2}$ le milieu du côté $[a_i, a_j]$, $1 \le i < j \le 3$.

6.3 Conditions nécessaires et suffisantes pour la P-unisolvance

Lemme 6.3.1 Σ *est* P*-unisolvant si et seulement si*

1. *il existe* N *fonctions* p_i *linéairement indépendantes telles que*
$$p_i(p_j) = \delta_{ij},$$

2. *dim* P *=card* Σ.

ou

1. *l'unique fonction* $p \in P$ *telle que* $\varphi_i(p) = 0\ \forall i$ *est l'application nulle,*
2. *dim* P *=card* Σ.

démonstration : La P-unisolvant est équivalente à la bijectivité de l'application :

$$\phi : P \longrightarrow (\varphi)_{i=1}^{N}.$$

$\Longrightarrow$ si $(e_i = \delta_{ij})_{j=1}^{N}$ est la base canonique de $I\!R^N$, on a $p_i = \phi^{-1}(e_i)$.
$\Longleftarrow$ étant donné $\alpha = (\alpha_j)_{j=1}^{N}$, on vérifie que $p \in P$ donné par

$$p = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i p_i$$

satisfait $\phi(p) = \alpha$. Donc ϕ est surjective donc bijective.

Definition 6.3.1 *L'ensemble* $\{p_i\}_{i=1}^{N}$ *déterminé au point 1. est appelé* **une base** *de* P *associée à l'élément fini* (K, P, Σ).

Remarque 6.3.1 *La base* $\{p_i\}_{i=1}^{N}$ *de l'élément fini est en fait la base locale qui nous a servi à définir la base globale de l'espace discret* V_h *d'où son nom.*

Remarque 6.3.2 *Dans la pratique* K *est en général un polyhèdre de* $\mathbb{R}^n$ *;* P *est un espace de polynômes et les formes linéaires sont des types suivants :*

1. $\varphi_i : p \mapsto p(a_i)$*, où* a_i *sont des points de* K*,*
2. $\varphi_i : p \mapsto \nabla p(a_i) \cdot \xi_i$*, où* a_i *sont des points de* K*,* $\nabla p(a_i)$ *désigne le gradient de* p *en* a_i *ie*

$$\nabla p(ai) = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{x_1}(a_i) \\ \frac{\partial p}{x_2}(a_i) \\ . \\ . \\ . \\ \frac{\partial p}{x_n}(a_i) \end{pmatrix}$$

où ξ_i *désigne un vecteur de* $\mathbb{R}^n$.

3. $\varphi_i : p \mapsto \xi_i^t D^2 p(a_i)\eta_i$, *où* a_i *sont des points de* K,

$$D^2 p(a_i) = \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x_k \partial x_l}\right)_{1\leq k,l\leq n}$$

désigne la matrice hessienne des dérivées secondes de p *évaluées en* a_i *;* ξ_i, η_i *désignent des vecteurs de* $\mathbb{R}^n$ *fixés.*

Lorsque toutes les formes linéaires sont du type 1), *on parle d'éléments finis de Lagrange, lorsqu'elles sont du type* 1), 2) *et* 3) *on parle d'éléments finis d'Hermite.*

6.4 Famille d'éléments finis

Definition 6.4.1 *Deux éléments finis* (K, P, Σ) *et* (K', P', Σ') *sont dits* **affinements équivalents** *si et seulement si il existe une application affine inversible* $F : I\!R^n \longrightarrow I\!R^n$ *telle que*

1. $F(K) = K'$,
2. $P = \{p' \circ F^{-1}, \forall p \in P'\}$,
3. *il existe des ensembles* $\Sigma = \{\varphi_i\}_{i=1}^N$ *et* $\Sigma' = \{\varphi'_i\}_{i=1}^N$ *telles que* $\varphi_i(p) = \varphi'_i(p \circ F)$, $\forall p \in P, \forall i = 1, .., N$.

L'intérêt de cette notion repose sur le fait que les fonctions de base se transportent d'un élément fini à l'autre. **C'est cette propriété que l'on a utilisée dans l'approximation pour calculer les fonctions de base locales en fonctions des fonctions de base de l'élément de référence pour pouvoir calculer la matrice** A **et le second membre** b**. On a transporté les fonctions de base de l'élément de référence sur chaque petit élément de la triangulation car les éléments finis utilisés étaient affinements équivalents.**

Exercice 6.4.1 *Elément fini d'Hermite d'ordre 3*
Montrer que (K, P_3, Σ_K) *où*

1. *K est triangle*
2. *P_3 est l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à trois.*
3. *Σ_K est l'ensemble des formes linéaires suivantes :*
   (a) $\varphi_i : p \mapsto p(a_i)$, *$i = 1, 2, 3$,*
   (b) $\varphi_{ij} : p \mapsto \nabla p(a_i) \cdot (a_j - a_i)$, *$i, j = 1, 2, 3$ $i \neq j$.*
4. *Deux éléments sont-ils affinement équivalents ?*

Exercice 6.4.2 *Triangle de Morley*
Montrer que (K, P_2, Σ_K) où

1. *K est triangle*
2. *P_2 est l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à deux.*
3. *Σ_K est l'ensemble des formes linéaires suivantes :*
   (a) $\varphi_i : p \mapsto p(a_i)$, *$i = 1, 2, 3$,*
   (b) $\psi_i : p \mapsto \frac{\partial p}{\partial \nu_i}(m_i)$, *$i = 1, 2, 3$ et m_i est le milieu du coté opposé à a_i et ν_i est le vecteur normal sortant de ce coté.*
4. *Deux éléments sont-ils affinement équivalents ?*

Exercice 6.4.3 *Elément fini d'Agyris*
Montrer que (K, P_5, Σ_K) où

1. *K est triangle*
2. *P_5 est l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à cinq.*
3. *Σ_K est l'ensemble des formes linéaires suivantes :*
   (a) $\varphi_i : p \mapsto p(a_i)$, *$i = 1, 2, 3$,*
   (b) $\varphi_{ij} : p \mapsto \frac{\partial p}{\partial x_j}(a_i)$, *$i = 1, 2, 3$ $j = 1, 2$,*
   (c) $\varphi_{ijk} : p \mapsto \frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial x_k}(a_i)$, *$i = 1, 2, 3$ et $0 \leq j, k \leq 2$ tel que $j + k = 2$,*
   (d) $\psi_i : p \mapsto \frac{\partial p}{\partial \nu_i}(m_i)$, *$i = 1, 2, 3$ et m_i est le milieu du coté opposé à a_i et ν_i est le vecteur normal sortant de ce coté.*
4. *Deux éléments sont-ils affinement équivalents ?*

Exercice 6.4.4 *Soit le triplet* (K, P, Σ) *défini par*

1. K *est le losange de sommets* $(-1, 0)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$ *et* $(0, 1)$.
2. $P = Q^1$
3. $\Sigma = \{p(A^i),\ i = 1, 4\}$.

Est ce que c'est un élément fini ?

6.5 Exemples d'éléments finis en dim 3

Les éléments finis en dimension 3 se construisent comme en dimension 2. Il y a deux familles d'éléments finis :

1. les éléments finis triangulaires
2. les éléments finis rectangulaires

6.5.1 Exemples d'eléments finis triangulaires

1. K est un tétraèdre, $P = P^1$ et $\Sigma = \{\varphi_i\}_{i=1}^4$ avec
$$\varphi_i : P^1 \longrightarrow I\!R : p \longrightarrow p(a_i) \ \ \forall i = 1, 4.$$
(Ici P^1 est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à un en x_1, x_2 et x_3).
2. K est un tétraèdre, $P = P^2$ et $\Sigma = \{\varphi_i\}_{i=1}^4 \cup \{\varphi_{ij}\}_{1 \le i < j \le 4}$ avec
$$\varphi_i : P^2 \longrightarrow I\!R : p \longrightarrow p(a_i) \ \ \forall i = 1, 4,$$
$$\varphi_{ij} : P^2 \longrightarrow I\!R : p \longrightarrow p(a_{ij}) \ \ \forall 1 \le i < j \le 4$$
avec a_{ij} le milieu de l'arête $[a_i, a_j]$.

6.5.2 Exemples d'eléments finis rectangulaires

1. K est un cube, $P = Q^1$ et $\Sigma = \{\varphi_i\}_{i=1}^4$ avec
$$\varphi_i : Q^1 \longrightarrow I\!R : p \longrightarrow p(a_i) \ \ \forall i = 1, 4.$$

(Ici Q^1 est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à un par rapport à chaque variable x_1, x_2 et x_3, il est engendré par 1, x_1, x_2, x_3, x_1x_2, x_1x_3, et x_2x_3).

2. K est un cube, $P = Q^2$ et $\Sigma = \{\varphi_i\}_{i=1}^4 \cup \{\varphi_{ij}\}_{1\leq i<j\leq 4}$ avec

$$\varphi_i : Q^2 \longrightarrow I\!R : p \longrightarrow p(a_i) \ \ \forall i = 1, 4,$$

$$\varphi_{ij} : Q^2 \longrightarrow I\!R : p \longrightarrow p(a_{ij}) \ \ \forall 1 \leq i < j \leq 4$$

avec a_{ij} le milieu de l'arête $[a_i, a_j]$.

Exercice 6.5.1 *Soit le triplet* (K, P, Σ) *avec*

1. *K est le carré unité,*
2. $P = Q^2$
3. $\Sigma = \{\varphi_i\}_{i=1}^9$ *avec*

$$\varphi_i : Q^2 \longrightarrow I\!R,\ p \longrightarrow p(a_i) \text{ pour } i = 1, 4$$

$$\varphi_i : Q^2 \longrightarrow I\!R,\ p \longrightarrow p(a_{ij}) \text{ pour } i = 5, 8$$

et

$$\varphi_9 : Q^2 \longrightarrow I\!R, p \longrightarrow p(G)$$

où a_i sont les sommets du carré, a_{ij} les milieux des côtés et G le centre de gravité du carré.

Montrer que c'est un élément fini unisolvant. (on pourra essayer de trouver une base associée à l'élément fini.

Exercice 6.5.2 *Soient (K, P, Σ) et (K', P', Σ') deux éléments finis introduits à l'exemple 3. (élément fini triangulaire P^1). Montrer qu'ils sont affinements équivalents et calculer explicitement la transformation affine.*

Chapitre 7

Eléments finis pour Stokes

La généralisation de la méthode des éléments finis à un système d'équations aux dérivées partielles ne pose pas de problèmes particuliers. Ce n'est pas le cas pour le système des équations de Stokes à cause de la condition d'incompressibilité du fluide ou condition de divergence nulle pour la vitesse. Dans domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, en présence de forces extérieures $f(x)$, les équations de Stokes s'écrivent :

$$\begin{cases} \nabla p - \mu \Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{7.1}$$

où $\mu > 0$ est la viscosité du fluide.

7.1 Première formulation variationnelle

Nous proposons la formulation variationnelle :

Trouver $u \in V$ tel que

$$\int_\Omega \mu \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f \cdot v \, dx \; \forall v \in V \tag{7.2}$$

où V est l'espace de Hilbert défini par :

$$V = \{v \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que } \operatorname{div} v = 0 \text{ pp dans } \Omega\}.$$

Comme V contient la contrainte d'incompressibilité $div\, v = 0$, il est très difficile de construire une approximation par la méthode des éléments finis de (7.2). Plus précisement la difficulté est de définir un sous espace de dimension finie V_h inclus dans V dont les éléments s'écrivent grâce aux fonctions de base P_k ou Q_k. Par exemple, si τ_h est une triangulation régulière au sens de Ciarlet de l'ouvert Ω, on peut définir

$$V_h = \{v \in C^0(\Omega),\, divv = 0 \text{ dans } \Omega, v_{|K} \in P_k^N \,\forall K \in \tau_h,\, v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\},$$

mais il n'est pas clair que V_h ne soit pas trop petit. En outre, il faudrait construire une base de V_h qui vérifie la condition $div\, v = 0$. Donc en général, on n'utilise pas la formulation (7.2).

7.2 Une autre formulation variationnelle : problème de type point selle

En pratique, on introduit une autre formulation variationnelle qui consiste à ne pas forcer l'incompressibilité dans la définition de l'espace et à garder la pression comme inconnue dans la formulation variationnelle. En multipliant la première équation de (7.1) par une fonction test $v \in H_0^1(\Omega)^N$ et la deuxième équation par une autre fonction test $q \in L^2(\Omega)$, on obtient après intégration par parties : trouver $(u, p) \in H_0^1(\Omega)^N \times L_0^2(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} \int_\Omega \mu\nabla u \cdot \nabla v\, dx - \int_\Omega p\, div\, v dx = \int_\Omega f \cdot v\, dx \\ \int_\Omega q\, div\, u\, dx = 0, \end{cases} \tag{7.3}$$

pour tout $(v, q) \in H_0^1(\Omega)^N \times L_0^2(\Omega)$ avec

$$L_0^2(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega),\ \text{tel que } \int_\Omega q\, dx = 0\}.$$

Un intérêt supplémentaire de cette nouvelle formulation est que la pression n'y est pas éliminée et donc il sera possible de la calculer.

Exercice 7.2.1 *Montrer que* (u, p) *est solution de* (7.1) *si et seulement si* (u, p) *est solution de* (7.3).

Remarque 7.2.1 *Pour montrer que le problème* (7.3) *a une unique solution, on utilise ce que l'on appelle la théorie des méthodes mixtes.*

7.3 Approximation de la formulation variationnelle

Il est alors facile de construire une approximation de (7.3). On définit les espaces discrets

$$\begin{cases} V_h = \{v \in C^0(\Omega)^N \text{ tel que } v_{|K} \in P_k^N \text{ pour tout } K \in \tau_h \text{ et } v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\} \\ Q_h = \{q \in C^0(\Omega) \text{ tel que } q_{|K} \in P_{k'} \text{ pour tout } K \in \tau_h\} \end{cases}$$

qui sont bien des sous espaces de $H_0^1(\Omega)^N \times L_0^2(\Omega)$.

Le problème discret s'écrit : trouver $(u_h, p_h) \in V_h \times Q_h$ tel que :

$$\begin{cases} \int_\Omega \mu \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, dx - \int_\Omega p_h \, div \, v dx = \int_\Omega f \cdot v \, dx \\ \int_\Omega q_h \, div \, u \, dx = 0, \end{cases} \tag{7.4}$$

pour tout $(v_h, q_h) \in V_h \times Q_h$.

On introduit une base $(\varphi_j)_{1 \le j \le n_V}$ de V_h (n_V dimension de V_h) et une base $(\psi_j)_{1 \le j \le n_Q}$ de Q_h (n_Q dimension de Q_h). On décompose u_h et p_h sur ces bases

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{n_V} u_j \varphi_j(x), \quad p_h(x) = \sum_{j=1}^{n_Q} p_j \psi_j(x).$$

La forme matricielle de (7.4) est

$$\begin{pmatrix} A_h & B_h^* \\ B_h & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_h \\ P_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_h \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7.5}$$

où B_h^* est la matrice adjointe ou transposée de B_h et

$$(A_h)_{1 \le i,j \le n_V} = \Big(\mu \int_\Omega \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j \, dx), \Big)_{1 \le i,j \le n_V}$$

$$(B_h)_{1\le i\le n_V,\, 1\le j\le n_Q} = \Big(-\int_\Omega \psi_i \mathrm{div}\varphi_j \, dx \Big)_{1\le i\le n_V,\, 1\le j\le n_Q},$$
$$U_h = (u_i)_{1\le i\le n_V},$$
$$P_h = (p_i)_{1\le i\le n_Q}.$$

On a le résultat suivant pour le système (7.5).

Théorème 7.3.1 *Le système* (7.5) *admet unique solution* $(U_h, P_h) \in \mathbb{R}^{N_V} \times \mathbb{R}^{N_Q}$ *tel que le vecteur* U_h *est unique tandis que* P_h *est unique à l'addition d'un élément de* $KerB_h^*$.

preuve : Comme $(KerB_h)^\perp = ImB_h^*$, on peut montrer que le système (7.5) est équivalent à

$$\text{Trouver } U_h \in KerB_h \text{ tel que } (A_hU_h, W_h) = (b_h, W_h) \ \forall W_h \in KerB_h.$$

Il suffit alors d'appliquer le théorème de Lax-Milgram pour obtenir l'existence et l'unicité de U_h dans $KerB_h$. Par ailleurs, on vérifie que P_h est déterminé à un élément de $KerB_h^*$ près car P_h est solution de

$$B_h^*P_h = b_h - A_hU_h.$$

On peut caractériser le noyau de B_h^*.

Lemme 7.3.1 *Le vecteur de* $\mathbb{R}^{N_Q}$ *dont toutes les composantes valent 1 est dans* $KerB_h^*$.

preuve : La fonction $r_h = 1$ appartient à Q_h et pour tout $w_h \in V_h$ on a

$$\int_\Omega r_h \mathrm{div}\, w_h \, dx = (W_h, B_h^*R_h) = (B_hW_h, R_h)$$

avec $R_h = (1, ...1) \in \mathbb{R}^{N_Q}$ et $W_h = (w_h(x_i))$, (x_i) étant les points du maillage. Ainsi, on a

$$(W_h, B_h^*R_h) = \int_\Omega \mathrm{div}\, w_h \, dx = \int_{\partial\Omega} w_h \cdot n \, ds = 0 \text{ pour tout } w_h \in V_h.$$

On en déduit que $R_h = (1, ...1)$ appartient à $KerB_h^*$.

Remarque 7.3.1 *La pression discrète p_h est définie au moins à une constante près.*

On admet le résultat suivant.

Lemme 7.3.2 *Si on choisit $k = 2$ et $k' = 1$ (éléments finis quadratiques en vitesse et linéaire en pression) on peut montrer que le noyau de $KerB_h^*$ est engendré par le vecteur $R_h = (1, ..., 1)$ c'est à dire que les éléments de $KerB_h^*$ sont des vecteurs constants.*
Lorsque $k = 1$ et $k' = 1$ le noyau contient des éléments autres que les constantes.

Dans la pratique, si $dim(KerB_h^*) > 1$ la méthode des éléments finis est inutilisable car la méthode est **instable** : l'algorithme hésite entre plusieurs pressions discrètes, la résolution du système va conduire à des oscillations numériques. Par contre si $dim(KerB_h^*) = 1$, en imposant par exemple la moyenne de la pression sur le domaine Ω, on supprime l'indétermination sur la pression discrète et le système a une unique solution.

Chapitre 8

Eléments finis de Raviart-Thomas pour le problème de Dirichlet

8.1 Problème de Dirichlet

8.1.1 Formulation mixte du problème de Dirichlet

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ dont la frontière supposée lipschitzienne est notée Γ. On considère le problème de Dirichlet non homogène :

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ tel que :

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(\tilde{a}\,\mathrm{grad} u) = f \text{ dans } \Omega, \\ \qquad u = g \text{ sur } \Gamma \end{cases} \tag{8.1}$$

avec $\tilde{a} \in L^\infty(\Omega, R^{2,2})$ vérifiant :

$$\exists\, \alpha > 0 \text{ tel que } \tilde{a}(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2, \;\; \forall \xi \in I\!\!R^2 \text{ pp en } x \in \Omega,$$

$f \in L^2(\Omega)$, et $g \in H^{1/2}(\Gamma)$.

Remarque 8.1.1 *1. L'espace $H^{1/2}(\Gamma)$ est l'espace des traces des éléments de $H^1(\Omega)$.*

2. $\tilde{a}$ est une matrice 2×2 dont les coefficients sont bornés sur Ω.

Introduisons la variable auxilliaire

$$\underline{p} = \tilde{a}(u) \,\mathrm{grad}\, u.$$

($\underline{p}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^2$).

Introduisons le cadre fonctionnel lié à l'analyse du problème.

On doit chercher $\underline{p} \in H(\mathrm{div}; \Omega)$ où

$$H(div; \Omega) = \{u \in L^2(\Omega)^2, \mathrm{div}\, v \in L^2(\Omega)\}.$$

D'autre part, si on note par $\underline{A}$ la matrice définie presque partout dans Ω par :

$$\underline{A}(x) = [\tilde{a}(x)]^{-1}$$

on a

$$\underline{A}\,\underline{p} = \mathrm{grad}\, u.$$

En multipliant cette égalité par une fonction test q, en intégrant sur Ω et en utilisant une formule de Green, on a

$$\int_\Omega \underline{A}\,\underline{p}.\underline{q}\; dx + \int_\Omega u\, \mathrm{div}\underline{q}\; dx =< \underline{q} \cdot \underline{n}, u \;> .$$

En écrivant faiblement (8.1), on obtient

$$\int_\Omega v\, \mathrm{div}\, \underline{p}\, dx = -\int_\Omega f\; v\; dx.$$

La formulation variationnelle mixte du problème (8.1) est alors :
Trouver $(\underline{p}, u) \in X \times M$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} a(\underline{p}, \underline{q}) & + & b(\underline{q}, u) & = & L(\underline{q}) \;\; \forall \underline{q} \in X \\ & & b(\underline{p}, v) & = & \chi(v) \;\; \forall v \in M \end{array} \right. \tag{8.2}$$

avec

$$X = H(\mathrm{div}, \Omega),$$

$$M = L^2(\Omega),$$

$$a(\underline{p}, \underline{q}) = \int_\Omega \underline{A}\,\underline{p}.\underline{q}\, dx,$$

$$b(\underline{p}, v) = -\int_\Omega v \operatorname{div} \underline{p}\, dx,$$

$$L(\underline{q}) = < \underline{q} \cdot \underline{n},\ g\ >,$$

$$\chi(v) = \int_\Omega f\, v\, dx.$$

Exercice 8.1.1 *Montrer que la formulation variationnelle est équivalente au problème* (8.1) *et qu'en particulier on retrouve bien la condition de bord de type Dirichlet.*

Pour montrer que le problème variationnelle a une unique solution, on va utiliser le résultat suivant.

Théorème 8.1.1 *Soient X et M deux espaces de Hilbert.*

$$a : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$b : X \times M \longrightarrow \mathbb{R}$$

continues respectivement sur $X \times X$ et $X \times M$ ie

$$\exists\, M_a \geq 0, \quad |a(v, w)| \leq M_a \|v\|_X \|w\|_X,$$

$$\exists\, M_b \geq 0, \quad |b(v, \mu)| \leq M_b \|v\|_X \|\mu\|_M.$$

Pour tout $(L, \chi) \in X' \times M'$, on considère le problème de type point selle suivant :
Trouver $(u, \lambda) \in X \times M$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a(u, q) \ + \ b(q, \lambda) & = & L(q), \ \ \forall q \in X \\ b(u, v) & = & \chi(v), \ \ \forall v \in M \end{array} \right. \tag{8.3}$$

Si on suppose de plus que :

1. *a est coercive sur Ker b*

2. $\exists\,\beta > 0, \quad \sup_{\|p\|_X=1} b\,(\underline{p}, v) \geq \beta\,\|v\|_M \;\; \forall v \in M$

alors le problème (8.3) a une unique solution $(u, \lambda) \in X \times M$.

Lemme 8.1.1 *La forme bilinéaire b vérifie la "condition inf-sup" de Brezzi sur* $X \times M$ *ie :*

$$\exists\,\beta > 0, \quad \sup_{\|\underline{p}\|_X=1} b\,(\underline{p}, v) \geq \beta\,\|v\|_M \;\; \forall v \in M.$$

<u>**Preuve**</u>

La démarche utilisée est la suivante :
On construit un opérateur $T \in \mathcal{L}(M, X)$ tel que

$$b\,(Tv, v) = \|v\|_M^2$$

La "condition inf-sup" s'en déduit immédiatement.
En effet, en posant $\underline{p} = Tv$, on a :

$$\begin{aligned} b\,(\underline{p}, v) = \|v\|_M^2 = \|T\|\;\|v\|\;\frac{1}{\|T\|}\;\|v\| \\ \geq \|\underline{p}\|\;\frac{\|v\|}{\|T\|} \\ \geq \frac{1}{\|T\|}\;\|\underline{p}\|\;\|v\|. \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \sup_{\underline{p}\in X, \|\underline{p}\|_X=1} b\,(\underline{p}, v) \geq \frac{1}{\|T\|}\;\|v\| \;\; \forall v \in M.$$

On choisit alors $\beta = \frac{1}{\|T\|}$.

On construit T en introduisant un problème auxiliaire : pour $v \in M$ fixé, trouver w tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} w \in H_0^1(\Omega) \\ -\Delta w = v \end{array} \right. \tag{8.4}$$

On pose alors
$$Tv = -\mathrm{grad}\, w.$$
La théorie variationnelle nous dit que le problème a une unique solution w et que :
$$\begin{aligned}\|Tv\|_{(L^2(\Omega))^2} &= |w|_1 \leq \|w\|_{H^1} \\ &\leq C\,\|v\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$
De plus, on a :
$$\begin{aligned}\|\mathrm{div}(Tv)\| &= \|\Delta w\|_{L^2} \\ &= \|v\|_{L^2}.\end{aligned}$$
Donc
$$Tv \in H(\mathrm{div}, \Omega).$$
Ainsi, on obtient :
$$b(Tv, v) = -\int_\Omega \mathrm{div}(Tv)v = \|v\|^2.$$

Théorème 8.1.2 *Le problème du point selle* (8.2) *pour le problème de Dirichlet* (8.1) *admet une unique solution dépendant continuement des données* $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ *et* $f \in L^2(\Omega)$*.*

Preuve : D'après le lemme 8.1.1,la forme bilinéaire b vérifie la condition inf-sup. Il reste à montrer que a est coercive sur

$V = Ker\,(b) = \{\underline{p} \in X,\, b(\underline{p}, v) = 0,\, \forall v \in M\} = \{\underline{p} \in X,\, \mathrm{div}\,\underline{p} = 0\}.$

La propriété d'éllipticité de $\tilde{a}$ donne en posant $A\xi = D$ ie $\xi = \tilde{a}D$,
$$\underline{A}\xi.\xi = \tilde{a}D.D \geq \alpha|\underline{A}\xi|^2.$$
D'autre part : $|\xi| = |\tilde{a}\underline{A}\xi| \leq \|\tilde{a}\|_{L^\infty}\,|\underline{A}\xi| \;\; \forall \xi \in I\!R^2$ pp sur Ω.
D'où,
$$\frac{|\xi|}{\|\tilde{a}\|_{L^\infty}} \leq |\underline{A}\xi|.$$

Ainsi on a :

$$\underline{A}\xi.\xi \geq \alpha \frac{|\xi|^2}{\|\tilde{a}\|^2_{L^\infty}} = \gamma^{'} |\xi|^2.$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} a(p,p) = \int_\Omega \underline{A}\underline{p} \cdot \underline{p} &\geq \gamma^{'} \|\underline{p}\|^2_{L^2(\Omega)^2} \\ &\geq \gamma^{'} \|\underline{p}\|^2_X, \end{aligned}$$

car div $\underline{p} = 0$ pour $\underline{p} \in V$.

8.2 Approximation du problème continu (8.2)

C'est une méthode d'éléments finis construite sur un maillage τ_h en triangles T de Ω. Rappelons que τ_h est un maillage de type éléments finis si τ_h constitue un une partition sans recouvrement de Ω

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{T \in \tau_h} \bar{T}$$

$$\forall T, L \in \tau_h : T \neq L, \text{ alors } T \cap L = \oslash.$$

On note $\mathcal{E}_h$ l'ensemble des arêtes du maillage :

$$\forall T' \in \mathcal{E}_h, \text{ on a l'alternative}$$

$$\exists\, T, L \in \tau_h : T \neq L \text{ avec } T' \in T \text{ et } T' \in L \quad (T' \text{ est une arête interne})$$

ou

$$T' \subset \Gamma \quad (T' \text{ est une arête frontalière}).$$

Pour cette méthode d'approximation, on aura besoin de définir un sens pour la normale aux arêtes internes car les degrés de liberté de la variable $\underline{p}$ seront les flux de cette variable au travers des arêtes des triangles du maillage.

On fixe un sens de traversée de chaque arête en fixant la normale unitaire à cette dernière. Cette normale est la normale sortante de Ω si

l'arête est frontalière et, par exemple, sortante de l'elément de plus bas numéro et donc entrante dans l'elément de plus fort numéro.
On notera :

$$\begin{cases} T^+ : & \text{le triangle de plus bas numéro,} \\ T^- : & \text{le triangle de plus fort numéro,} \\ T' : & \text{l'arête commune aux 2 triangles.} \end{cases}$$

La normale à T' est dirigée de T^+ vers T^-.
La justification de l'utilisation des éléments finis de Raviart-Thomas pour approcher $X = H(div, \Omega)$ vient du théorème suivant :

Théorème 8.2.1

$$L(\Omega, I\!R^2) = \{\underline{p} \in L^2(\Omega, I\!R^2);\ \underline{p}_{|T} \in (C^\infty(\bar{T}))^2,\ \forall T \in \tau_h\}$$

alors

$$\underline{p} \in L(\Omega, I\!R^2) \textit{ est dans } H(\mathrm{div}, \Omega) \iff \underline{p}^+\underline{n}^+ + \underline{p}^-\underline{n}^- = 0 \textit{ sur } T\textit{'},$$

$$\forall \textit{ arête interne } T' \in \mathcal{E}_h$$

$$\textit{où} \quad \begin{cases} \mathcal{E}_h \textit{ représente l'ensemble des arêtes };\\ \underline{p}^\pm = \underline{p}_{T^\pm};\\ \underline{n}^\pm \textit{ est la normale unitaire à } T\textit{' orientée vers l'extérieur de } T^\pm. \end{cases}$$

On voit donc que pour construire un sous-espace d'éléments finis approchant $X = H(div, \Omega)$, il suffit de raccorder les composantes normales aux interfaces des différents éléments.

On s'appuie alors sur la proposition suivante.

Proposition 8.2.1 *Soit D une droite du plan et n une normale unitaire à D. Alors en notant par $\underline{x}$ la fonction dans $C^\infty(I\!R^2, I\!R^2)$ définie par :*

$$(\underline{x})_i = x_i,\ i = 1, 2$$

la fonction $\underline{x} \longrightarrow \underline{x} \cdot \underline{n}$ est constante sur D.

En effet, soit $\underline{x_0} \in D$. Clairement, $x \in D$ ssi $(\underline{x} - \underline{x_0}) \cdot \underline{n} = 0$. D'où le résultat.

On a alors la méthode des éléments finis de Raviart-Thomas à l'ordre le plus bas.

8.2.1 Elément fini de Raviart-Thomas

L'élément fini de Raviart-Thomas (T, RT_0, Σ) de plus bas degré est le triplet :

1. T est un triangle de sommets $\underline{a}_1^T, \underline{a}_2^T, \underline{a}_3^T$,
2. $RT_0 = \{\underline{p} = \underline{\alpha} + \beta \underline{x},\ \alpha \in I\!R^2,\ \beta \in I\!R\}$,
3. $\Sigma = \{l_i(p) = \int_{T_i'} \underline{p} \cdot \underline{n} dT',\ i = 1, 2, 3,\ \ T_i' = [\underline{a}_i^T, \underline{a}_{i+1}^T]\}$.

Remarque 8.2.1 *On en déduit d'après la proposition* 8.2.1 *que si* $p \in RT_0$ *alors* $p{\cdot}n$ *est constant le long des arêtes des triangles du maillage. Or* $p{\cdot}n$ *est l'inconnue du problème (ie qu'il est unique par arête). Donc les fonctions discrétisées avec les éléments finis de Raviart-Thomas ont une composante normale continue d'un triangle à un autre et sont donc dans* $H(div;\ \Omega)$.

Proposition 8.2.2 *Le triplet constitué* (T, RT_0, Σ) *est un élément fini c'est à-dire tout polynôme* $p \in RT_0$ *est parfaitement déterminé si on connaît* $l_i(p)$, $i = 1, 2, 3$. *On dit que le triplet est unisolvant.*

<u>Preuve</u>

$$\begin{array}{rlll} \Phi : & RT_0 & \longrightarrow & I\!R^3 \\ & \underline{p} & \longrightarrow & (l_i(\underline{p}))_{i=1,2,3} \end{array}$$

La dimension de RT_0 est égale à la dimension de $I\!R^3$. Montrons alors que Φ est injective ce qui impliquera que ϕ est bijective.
Supposons que $l_i(\underline{p}) = 0\ \forall i = 1, 2, 3$ avec $\underline{p} \in RT_0$. On a alors $\operatorname{div} \underline{p} =$

$2\,\beta$
De plus, on sait en utilisant la formule Green :

$$\int_T \operatorname{div} \underline{p} \;\; dT = \Sigma_{T'} \int_{T'} \underline{p}.\underline{n}\, dT' = 0 \implies \beta = 0.$$

D'où, $\underline{p} = \underline{\alpha}$. La nullité des flux entraîne alors que $\underline{\alpha}$ est orthogonal à deux directions non colinéaires donc c'est le vecteur nul.

8.2.2 Espaces d'approximation

On choisit comme espace d'approximation pour X

$$X_h = \{p_h \in X,\ p_{|T} \in RT_0 \ \ \forall\, T \in \tau_h\}.$$

C'est un sous espace de dimension N_a le nombre d'arête de $\mathcal{E}_h$ de $H(\operatorname{div};\Omega)$. Tout élément p_h est complètement caractérisé par ses degrés de liberté $\{p_h\}$ formés des flux à travers chaque arête des triangles.

Pour approcher M, on choisit

$$M_h = \{q_h \in M,\ q_{|T} \in P_0 \ \ \forall\, T \in \tau_h\}.$$

8.2.3 Approximation de la formulation mixte par les éléments finis RT_0

Elle repose sur le résultat suivant.

Théorème 8.2.2 *Le problème approché du problème* (8.2) *est :*
Trouver $(p^h, u^h) \in X^h \times M^h$ *tel que*

$$\left\{ \begin{array}{rrcl} a(p^h, q^h) + & b(q^h, u^h) & = & Lq^h, \quad \forall q^h \in X^h \\ & b(p^h, v^h) & = & \chi v^h, \quad \forall v^h \in M^h \end{array} \right. \tag{8.5}$$

est bien posé.
En outre, la solution converge (p^h, u^h) *vers la solution* (p, u) *du problème (8.2) lorsque* $h \to 0$.

Les degrés de libertés sont alors :

1. les flux de p à travers les arêtes des triangles du maillage
2. les valeurs de q au centre de gravité du triangle.

8.2.4 Système discret

Soient A, B, et g^h, f^h définis par :

$$\begin{array}{lcl} \{q^h\}^t A\{p^h\} & = & \int_\Omega \underline{A} p^h \cdot q^h \\ \{v^h\}^t B\{p^h\} & = & -\int_\Omega v^h \mathrm{div}\{p^h\} \\ \{q^h\}^t\{g^h\} & = & \int_\Gamma g^h q^h \cdot \underline{n} \\ \{v^h\}^t\{f^h\} & = & \int_\Omega f^h v^h \end{array}$$

La formulation mixte s'écrit sous forme matricielle :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} A\{p^h\} & + & B^t\{u^h\} & = & \{g^h\} \\ & & B\{p^h\} & = & \{f^h\} \end{array} \right. \tag{8.6}$$

D'après la première équation de (8.7),

$$p^h = -A^{-1}B^t u^h + A^{-1} g^h$$

car A est inversible.
On remplace p^h par sa valeur dans la deuxième équation de (8.7) et on obtient :

$$BA^{-1}B^t u^h = -f^h + BA^{-1} g^h.$$

Donc, pour trouver u^h, il nous faut calculer $\{g^h\}, \{f^h\}, A$ et B.

Calcul de $\{g^h\}$

Tout d'abord, on a :

$$\int_\Gamma g\, q^h \cdot \underline{n}\, d\Gamma = \sum_{T' \text{ frontalière}} \int_{T'} g\, q^h \cdot \underline{n}\, dT'.$$

On approche alors $g_{|_{T'}}$ par $g(m_T^{'})$ où $m_T^{'}$ est le milieu de l'arête $T^{'}$. D'où

$$\int_\Gamma g\, q^h \cdot n\, d\Gamma = \sum_{T' \text{ frontalière}} g(m_T^{'}) \int_{T'} q^h \cdot \underline{n}\, dT^{'}.$$

Donc, $\{g^h\}$ est un vecteur de longueur N_a définie par :

$$\{g^h\}_i = \begin{cases} 0 & \text{si i numero d'une arête interne} \\ g(m_i) & \text{si l'arête de numero i est frontalière} \end{cases}$$

Calcul de $\{f^h\}$

De même, on approche f sur chaque triangle T par $f(a_T)$ où a_T est le centre de gravité de T, d'où

$$\int_\Omega v^h f\,dx = \sum_{T\in\tau_h} \int_T f v_T\,dT = \sum_{T\in\tau_h} |T|\,f(a_T)\,v_T.$$

Soit encore,

$$\{f^h\}_i = |T_i| f(a_i)\ , \forall i = 1, ...N_e.$$

Calcul de A

En pratique, on numérote les arêtes en construisant un tableau des arêtes : $NARET(i,j)$ où $j = 1$, ..., N_e et $i = 1$, 2, 3 où N_e représente le nombre de triangles.
On note $l = |NARET\,(i,j)|$ le numéro global de l'arête i du triangle j tandis que i est son numéro local.
En outre,

$$NARET\,(i,j) est \begin{cases} \leq 0 \text{ si l'orientation de la normale à l'arête i est rentrante} \\ \ \text{relativement au triangle } T_i \\ (\text{ ie } T_i \text{ est le triangle } T^- \text{ relativement a l'arete } T_l^{'}) \\ \geq 0\text{si l'orientation de la normale à l'arête j est sortante} \\ \ \text{relativement au triangle } T_i \\ (\text{ ie } T_i \text{ est le triangle } T^+ \text{ relativement a l'arete } T_l^{'}) \end{cases}$$

Notons par $p_j^{[i]}$ les flux sortants de p_h relativement au triangle T_i, les degrés de liberté locaux $p_j^{[i]}$ sont reliés aux degrés de liberté globaux par

$$p_m = \epsilon_j^{[i]} p_j^{[i]},\ m = |NARET(i,j)|;\ \epsilon_j^{[i]} = sign(NARET(i,j)).$$

La matrice A d'ordre N_a est formée par assemblage à partir des matrices élémentaires. On écrit

$$\begin{array}{rcl} {q^h}^t A\, p^h & = & \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \int_T \underline{A}\, p^h \cdot q^h \, dT \\ & = & \sum_{i=1}^{N_e} [\epsilon_1^{[i]}\, q_1^{[i]}\, \epsilon_2^{[i]}\, q_2^{[i]}\, \epsilon_3^{[i]}\, q_3^{[i]}]\ A^{[i]} \begin{bmatrix} \epsilon_1^{[i]}\, q_1^{[i]} \\ \epsilon_2^{[i]}\, q_2^{[i]} \\ \epsilon_3^{[i]}\, q_3^{[i]} \end{bmatrix} \end{array}$$

où $A^{[i]}$ est la matrice élémentaire donnée par :

$$A_{k\,l}^{[i]} = \int_T^{[i]} \underline{A}\, J_l \cdot J_k \; dT_i,\ 1 \leq k \leq l \leq 3$$

où $J_l,\ l = 1,2,3$, désigne les fonctions de base définies par :

$$\int_{T_k^{[i]\prime}} J_l.n\, dT' = \delta_{k\,l}.$$

Calcul géométrique pour déterminer les fonctions de base dans un triangle T

On suppose que le triangle T a pour sommet $\underline{a}_l$, $\underline{a}_{l+1}$ et $\underline{a}_{l+2}$ et que l'arête l a pour sommet $\underline{a}_l$ et $\underline{a}_{l+1}$. Soit $\tilde{J}_l(x) = x - \underline{a}_{l+2},\ \forall x \in T$. Ce champ de vecteur vérifie :

$$\int_{T'_{l+1}} \tilde{J}_l(x) \cdot \underline{n} dT_{l+1} = \int_{T'_{l+2}} \tilde{J}_l(x) \cdot \underline{n} dT_{l+2} = 0,$$

$$\Longrightarrow \tilde{J}_l \text{ est colinéaire à } J_l \text{ ie } \tilde{J}_l = c_l J_l.$$

Mais

$$\int_{T'_l} \tilde{J}_l(x) \cdot \underline{n} = 2\,|T'_l|.$$

Donc,

$$J_l = \frac{1}{2|T'_l|}\,(x - \underline{a}_{l+2}).$$

Au besoin en prenant $\tilde{a}$ constante sur l'élément T, on obtient la matrice élémentaire par

$$A^{[i]}_{k\,l} = \frac{1}{12|T|}\sum_{n=1}^{3} A(\frac{\underline{a}_n + \underline{a}_{n+1}}{2} - \underline{a}_{l+2})(\frac{\underline{a}_n + \underline{a}_{n+1}}{2} - \underline{a}_{k+2})$$

car la formule d'intégration des milieux des arêtes

$$\int_T \phi\, dT \tilde{-} \frac{|T|}{3}\sum_{n=1}^{3}\phi(\frac{\underline{a}_n + \underline{a}_{n+1}}{2})$$

est exacte pour les polynômes de degré ≤ 2.
La formation de la matrice A se fait par assemblage par la formule

$$A \;\leftarrow\; A_{m\,n} \;+\; \epsilon^{[i]}_k \epsilon^{[i]}_l A^{[i]}_{k\,l}$$

m, $\epsilon^{[i]}_k$ et n, $\epsilon^{[i]}_l$ sont reliés respectivement à [i], k et [i], l par la définition de p_m.

La matrice A est une matrice de type éléments finis i.e deux degrés de liberté ne sont pas couplés s'ils n'appartiennent pas à un même élément. On définit la demi-largeur de bande l_b de la matrice A par

$$A_{mn} = 0 \text{ si } |m - n| \geq l_b.$$

Observons que l_b est donnée ici directement par

$$l_b = \max\{|m-n|;\;\; \exists T \;\in\; \tau_h \;\; : T^{'}_m,\, T^{'}_l \in T\}.$$

Calcul de la matrice B

La matrice B n'a pas besoin d'être calculée. En fait, il suffira étant donné un vecteur $\{p_h\}$ de longueur N_a, de savoir calculer le vecteur $\{v_h\}$ de longueur N_e défini par $v^h = B\,p^h$. Or, on a $\forall w^h \in M^h$

$$\begin{array}{rcl} {w^h}^T\, v^h & = & {w^h}^T\, B\, p^h \\ & = & \sum_{T\in\tau_h} \int_T w^h \operatorname{div} p^h\, dT \\ & = & \sum_{T\in\tau_h} w^h_i\,(p^{[i]}_1 + p^{[i]}_2 + p^{[i]}_3) \end{array}$$

Par identification, on a :

$$v_i^h = \epsilon_1^{[i]}\, p_{l_1}^h + \epsilon_2^{[i]}\, p_{l_2}^h + \epsilon_3^{[i]}\, p_{l_3}^h$$

avec $l_j = |NARET(i,j)|$ et $\epsilon_j^{[i]} = sign(NARET(i,j))$.

Bibliographie

[1] P. G. Ciarlet, Introduction à l'analyse numérique et matricielle, *Masson, 1988.*

[2] P. G. Ciarlet, The finite element method for elliptic problem, *North Holland, 1978.*

[3] G. Allaire, S. M. Kaber , Algèbre linéaire numérique, *Ellipses, 2002.*

[4] G. Allaire, S. M. Kaber , Introduction à Scilab, Exercices pratiques corrigés d'algèbre linéaire, *Ellipses, 2002.*

[5] P. A. Raviart, Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles, *Masson, 1992.*

[6] J. C. Nédélec, Notions sur les éléments finis, *Math. et Appl., SMAI, Ellipses, 1991.*

[7] A. Le Pourhiet, Résolution des équations aux dérivées partielles, *Cepadues Editions, 1988.*

[8] B. Lucquin, O. Pironneau, Introduction au calcul scientifique, *Masson, 1996.*

[9] S. Nicaise Analyse numérique et équations aux dérivées partielles, *Dunod, 2000.*

[10] L. Sainsaulieu, Calcul Scientifique,*Masson, 1996.*

[11] J. Rappaz, M. Picasso, Introduction à l'analyse numérique, *Presses polytechniques et unversitaires romandes, 1998.*

[12] C. Zuily, Problèmes de distributions, *Hermann, 1978.*

[13] L. Schwartz, Théorie des distributions, *Hermann, 1966.*

[14] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, *Masson, 1987.*